Д.Н. Ешуткин
Е.Н. Грядунова
А.В. Журавлева

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
СБОРНИК ЗАДАЧ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ – УЧЕБНО-НАУЧНО-
ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС»

Д.Н. Ешуткин, Е.Н. Грядунова, А.В. Журавлева

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
СБОРНИК ЗАДАЧ

Рекомендовано ФГОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК»
для использования в учебном процессе в качестве учебного пособия
для высшего профессионального образования

Орел 2011

УДК 531 (076)
ББК 22.21 7
Е96

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор
кафедры «Теоретическая и прикладная механика»
Федерального государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Государственный университет – учебно-научно-
производственный комплекс»
А.В. Коробко,

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой «Физика»
Федерального государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Государственный университет – учебно-научно-
производственный комплекс»
В.С. Шоркин,

кандидат технический наук, доцент, заведующий кафедрой
«Инженерная графика и механика»
Федерального государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Орловского государственного аграрного университета»
Г.М. Абрамов

Ешуткин, Д.Н.

Е96 Теоретическая механика. Сборник задач: учебное пособие для высшего профессионального образования / Д.Н. Ешуткин, Е.Н. Грядунова, А.В. Журавлева. – 2-е изд., перераб. и доп. – Орел: ФГОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК», 2011. – 85 с.

В учебном пособие подобраны задачи различной степени сложности по главным темам трех разделов теоретической механики и приведены основные теоретические положения для их решения. Материалы могут быть использованы для проведения текущих и итоговых проверок знаний студентов при тестовой и традиционной формах контроля.

Сборник задач предназначен студентам технических вузов всех специальностей очной и заочной формы обучения.

УДК 531 (076)
ББК 22.21 7

© ФГОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК», 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
1. Статика 5
1.1. Силы, расположенные в одной плоскости 6
1.2. Равновесие системы твердых тел 10
1.3. Силы, расположенные в пространстве 12
1.4. Центр тяжести 16
2. Кинематика 19
2.1. Кинематика точки 19
2.2. Поступательное и вращательное движение твердого тела 23
2.3. Сложное движение точки 30
2.4. Плоское движение твердого тела 37
3. Динамика 46
3.1. Первая задача динамики точки 47
3.2. Вторая задача динамики точки 51
3.3. Колебания материальной точки 54
3.4. Теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения 62
3.5. Теорема об изменении кинетического момента 68
3.6. Теорема об изменении кинетической энергии 74
Литература 84

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый сборник задач составлен преподавателями кафедры «Теоретическая и прикладная механика ОрелГТУ». Все задачи являются упрощенными: в них включены только главные вопросы, являющиеся основой изучаемой темы. Сборник задач предназначен для проверки знаний студентов по каждому разделу механики в процессе выполнения и защиты расчетных заданий, курсовых работ, проведения контрольных работ. Он состоит из трех разделов – статики, кинематики, динамики, по каждому из которых предусмотрены либо расчетные задания, либо контрольные работы.

Во всех разделах сборника, начиная со статики, используется векторное исчисление. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически и аналитически сумму векторов, знать свойства скалярного и векторного произведения, знать, что такое единичные вектора, уметь их дифференцировать. В кинематике необходимо уметь дифференцировать функцию одного переменного, строить графики этих функций, иметь понятие об естественных осях координат, кривых второго порядка. При изучении динамики нужно уметь вычислять интегралы от простейших функций, интегрировать простейшие дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

В учебном пособии не рассматриваются доказательства различных теорем и положений теоретической механики, однако перед каждой темой даются основные формулы и алгоритм решения задач.

Задачи сборника могут включаться в экзаменационные билеты и тесты. Все упражнения, включенные в сборник, прошли проверку и корректировку в процессе преподавания теоретической механики в Орловском государственном техническом университете.

1. СТАТИКА

Наиболее общим методом решения задач статики на равновесие является аналитический метод.

Применяя аналитический метод решения задач, желательно придерживаться следующего порядка. Прежде всего необходимо понять смысл задачи: установить, что задано и что требуется определить. Затем следует проиллюстрировать задачу расчетной схемой (рисунком). После этого нужно:

- выявить объект (тело или точку), равновесие которого следует рассматривать; показать на рисунке заданные силы, приложенные к этому объекту;
- установить связи, непосредственно наложенные на тело, освободить тело от связей и заменить их реакциями связей;
- проанализировать полученную систему сил с точки зрения расположения их в пространстве, тем самым, установив число уравнений равновесия;
- выявить число неизвестных в задаче, установить ее статическую неопределимость;
- выбрать оси координат (если они не заданы условием задачи) и составить уравнения равновесия тела, находящегося под действием приложенных сил;
- решить уравнения относительно тех неизвестных, которые требуется определить по условию задачи.

Уравнение равновесия желательно решать в общем виде.

В большинстве задач статики нельзя заранее указать не только величину, но и направление той или иной реакции связи. В таких случаях неизвестную реакцию разлагают на составляющие, направленные вдоль соответствующих осей координат, и вводят их в условия равновесия в качестве неизвестных.

Если в результате решения уравнений какая-нибудь из составляющих окажется отрицательной, то это означает, что данная составляющая реакции в действительности направлена в сторону, противоположную указанной на рисунке.

В разделе «Статика» приняты следующие основные обозначения:

$\overline{F}$, $\overline{Q}$, $\overline{P}$, $\overline{G}$ и другие – силы;

F_X , F_Y , F_Z – проекции силы $\overline{F}$ на координатные оси x ,y, z;

$\overline{M}_0$ – главный момент системы сил относительно центра O;

$M_0(\overline{F})$ – алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно центра O;

$M_Z(\overline{F})$ – момент силы $\overline{F}$ относительно оси Oz;

M – момент пары сил;

q – интенсивность нагрузки;

$\overline{R}$ – главный вектор системы сил;

R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az} – составляющие полной реакции $\overline{R}_A$, направленные по осям x, y, z;

x_c, y_c, z_c – координаты центра тяжести.

1.1. Силы, расположенные в одной плоскости

Условия равновесия твердого тела под действием произвольной плоской системы сил можно записать в одной из следующих форм:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\\&\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\\&\sum_{k=1}^{n} M_0(\overline{F}_k) = 0,\end{aligned}\right\} (1.1),\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\\&\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0,\\&\sum_{k=1}^{n} M_B(\overline{F}_k) = 0,\end{aligned}\right\} (1.2),\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0,\\&\sum_{k=1}^{n} M_B(\overline{F}_k) = 0,\\&\sum_{k=1}^{n} M_C(\overline{F}_k) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

За центр O, относительно которого определяется момент сил, принимают любую точку плоскости; прямая AB, соединяющая точки A и B, не должна быть перпендикулярна оси $0x$; центры A, B, C, относительно которых берутся моменты в 3-й форме, не должны лежать на одной прямой.

Если все силы, расположенные в плоскости, взаимно параллельны, то число уравнений равновесия сократится до двух. Их можно записать в формах:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\\&\sum_{k=1}^{n} M_0(\overline{F}_k) = 0,\end{aligned}\right\} (1.4),\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0,\\&\sum_{k=1}^{n} M_B(\overline{F}_k) = 0,\end{aligned}\right\} \quad (1.5)$$

Причем ось Ox параллельна силам, а прямая AB, соединяющая точки A и B не должна быть параллельна силам.

Для получения наиболее простых уравнений равновесия следует одну из координатных осей проводить перпендикулярно возможно большему числу неизвестных сил, а за центр выбирать точку, в которой пересекается большее число неизвестных сил.

При вычислении моментов сил иногда удобно раскладывать данную силу на составляющие и пользоваться теоремой о моменте равнодействующей (теорема Вариньона).

При решении некоторых задач следует учитывать трение качения. Наибольшее значение момента трения качения определяется по формуле:

$$M_{\text{тр.к.}} = k \cdot N, \tag{1.6}$$

где k – коэффициент трения качения;

N – модуль нормального давления.

Момент силы $\overline{F}$ относительно точки O, который обозначается $M_o(\overline{F})$, для плоской системы сил равен по абсолютной величине произведению модуля силы $\overline{F}$ на кратчайшее расстояние h от точки O до линии действия силы.

$$M_o(\overline{F}) = \pm\left|\overline{F}\right| \cdot h. \tag{1.7}$$

Если сила $\overline{F}$ стремится повернуть тело вокруг точки O против направления вращения часовой стрелки, то момент положителен, если наоборот, то отрицателен.

Задачи

Задача С 1.1

Для нагруженных балок (рис. 1.1) составить уравнения равновесия. Определить реакции связей в точках A и B, считая прямую C-C перпендикуляром стержню в точке A. Числовые данные и типы опор взять из табл. 1.1.

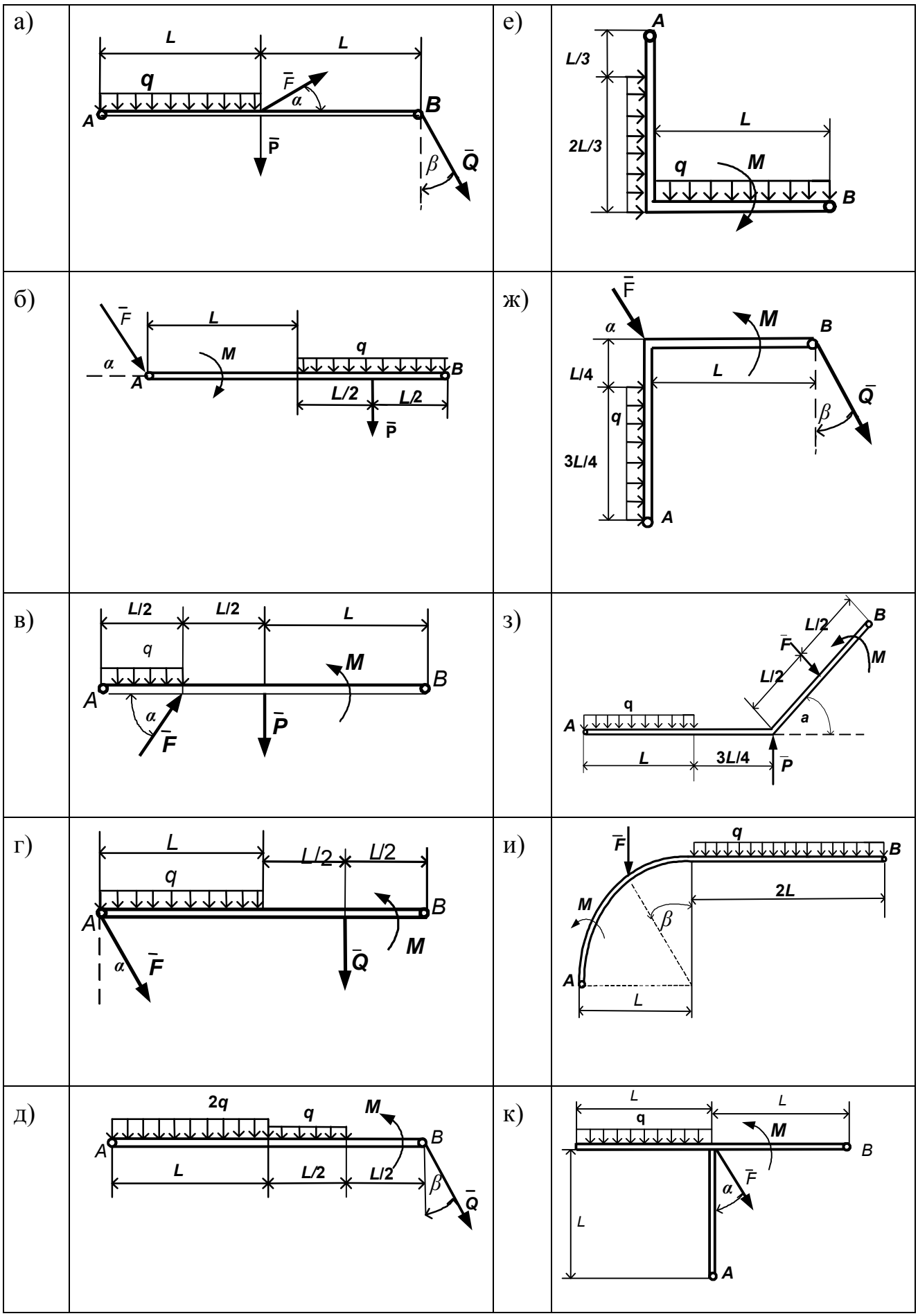
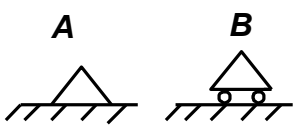
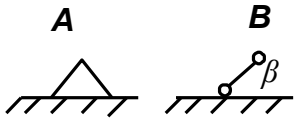


Рис. 1.1. Расчетные схемы к задаче С 1.1

Таблица 1.1

Числовые данные к задаче С 1.1

I				II				III			
											
№	схе-ма	Вид связи	l м	P, кН	Q, кН	F, кН	q, кН/м	M, кНм	α, град	β, град	γ, град
1	а	I II III	1 2 0,5	2 1 -	3 - 4	1,2 4 1,5	0,4 2 1	- - -	30 45 60	- 45 -	45 - 30
2	б	I II III	3 4 1	2 1 2	- - -	1 1,5 2	1 1,5 2	- 2 1	60 30 -	- 60 -	- - -
3	в	I II III	2 1 4	4 3 1	- - -	1 2 3	0,5 1 1,5	- 2 1	45 - 60	30 45 -	- - -
4	г	I II III	0,5 1,5 2	- - -	1 2 4	4 2 1	1 4 6	3 - 2	90 - 45	- 45 -	- - -
5	д	I II III	4 2 1	- - -	1 2 4	- - -	1,5 0,5 2	1,5 3,5 0,5	- - -	- 30 -	90 45 30
6	е	I II III	6 3 1	1 2 3	- - -	- - -	2,5 2,4 1,6	- 2 1	- 45 90	- 90 -	- - -
7	ж	I II III	0,5 0,6 0,8	- - -	4 2 8	2 4 6	2 4 6	4 - 2	- 30 90	- 30 -	90 45 -
8	з	I II III	2 4 6	1 2 4	- - -	4 2 1	1,2 0,8 0,2	1 2 4	30 60 45	- 45 -	- - -
9	и	I II III	1 2 4	- - -	- - -	1 2 3	0,8 1,2 1,6	2 4 6	90 90 90	- 30 -	90 60 30
10	к	I II III	4 2 1	- - -	- - -	5 7 9	3 5 7	2 4 6	- 30 45	- 30 -	- - -

1.2. Равновесие системы твердых тел

В статике иногда приходится решать задачи на равновесие нескольких тел, каким-либо образом связанных между собой. В таком случае для каждого из них в отдельности составляются уравнения равновесия с учетом сил, с которыми действуют друг на друга тела, входящие в систему. Эти силы попарно равны по величине и противоположны по направлению. В некоторых случаях удобно рассматривать равновесие всей системы связанных между собой тел как единого твердого тела (что возможно на основании принципа затвердевания) и равновесия только некоторых из входящих в систему тел.

Задачи на равновесие системы твердых тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил, решаются применением уравнений равновесия твердого тела, т. е. по приведенным выше формулам (1.1) – (1.5).

Задачи

Задача С 2.1

Составив уравнения равновесия, определить реакции связей и давление в шарнире *C* в схемах, приведенных на рис. 1.2. Необходимые данные взять из табл. 1.2.

Таблица 1.2

Числовые данные к задаче С 2.1

Схема	Длина	Прикладываемые нагрузки				Углы	
	l, м	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	M, кН·м	α, град	β, град
а	2	2	3	1	2	45	45
б	1	4		2			
в	4		2	2		45	
г	2	1		3		60	
д	1,2	1	1,5	1	1	45	45
е	2,4	3	4	4	3	60	30
ж	1,8	2,2	1	2,2	2	30	0
з	2,5	4	10	2,6	0,6	45	
и	0,6	2		3,2		30	
к	3	8	6	2	2	30	0
л	2	6	10	4	1,5	60	45
м	1	2	7	6	2	45	30

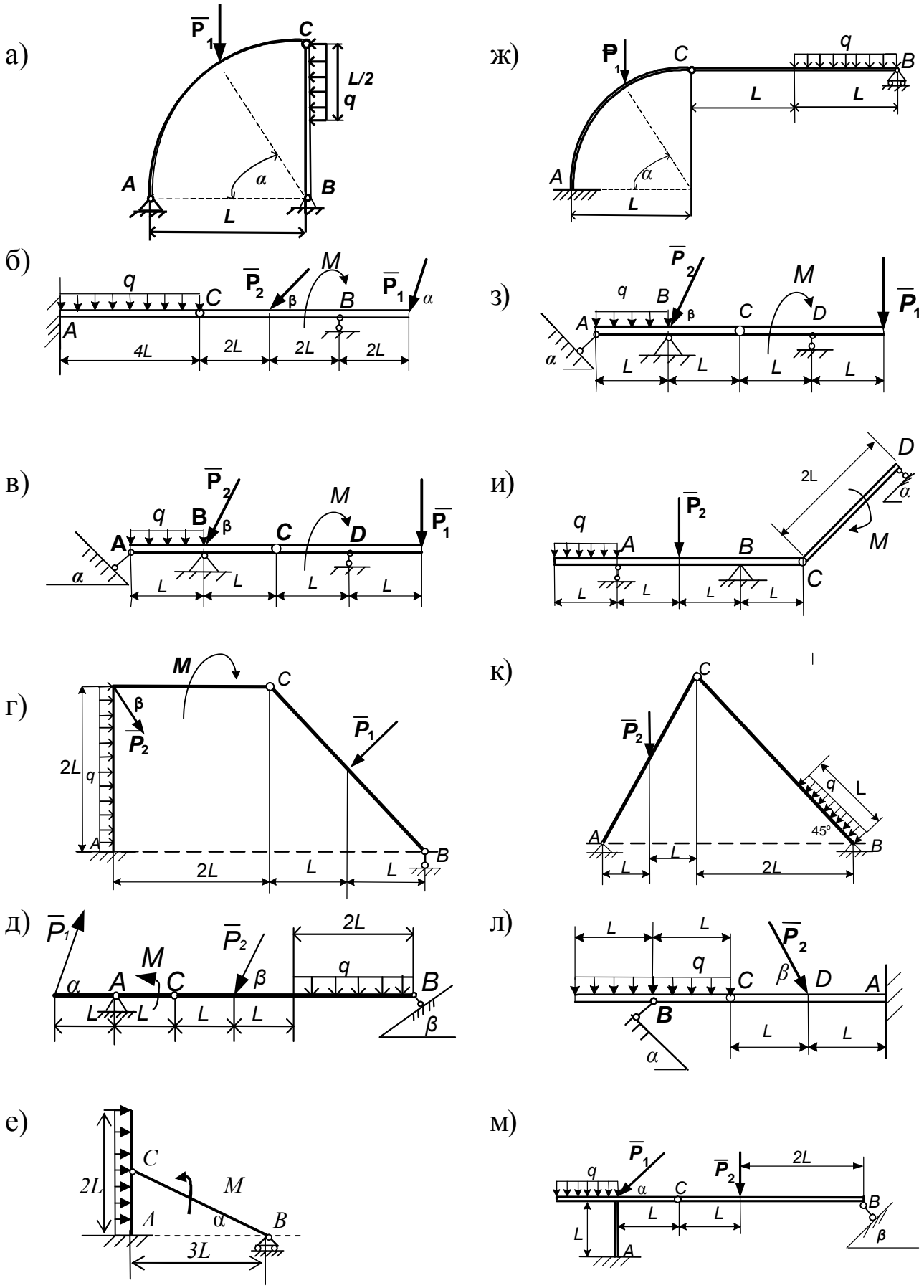


Рис. 1.2. Расчетные схемы к задаче С 1.2

1.3. Силы, расположенные в пространстве

Произвольная система сил в общем случае приводится к главному вектору сил *R*, и главному моменту сил *M*.

Главный вектор сил равен геометрической сумме всех сил и приложен в произвольном центре приведения *O*:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \,. \tag{1.8}$$

Главный момент сил равен геометрической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения *O*:

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_o(\overline{F}_i)\,. \tag{1.9}$$

Система сил находится в равновесии, если $\overline{R} = 0$ и $\overline{M} = 0$. Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент сил были равны нулю. Аналитическое условие равновесия произвольной пространственной системы сил записывается шестью уравнениями:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, && \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, && \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} M_x(\overline{F}_i) = 0, && \sum_{i=1}^{n} M_y(\overline{F}_i) = 0, && \sum_{i=1}^{n} M_z(\overline{F}_i) = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Если на тело действует пространственная система параллельных сил, то направив ось *Oz* параллельно этим силам, будем иметь следующие три уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} F_z = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_x(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_y(\overline{F}_i) = 0. \tag{1.11}$$

При вычислении суммы моментов сил относительно какой-либо оси необходимо:

1) каждую из заданных сил проецировать на координатную плоскость, перпендикулярную к данной оси;

2) из точки пересечения оси с плоскостью опустить перпендикуляр на линию действия проекции рассматриваемой силы, то есть найти плечо;

3) записать модуль момента силы относительно оси в виде произведения модуля проекции силы на найденное плечо; определить знак момента силы относительно оси.

Если определение проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, затруднительно, то следует разложить силу на составляющие.

Задачи

Задача С 3.1

Однородная прямоугольная рамка *ABCD* весом *P* прикреплена к стене при помощи шарового шарнира *A* и петли *B* и удерживается в горизонтальном положении веревкой *CE*, привязанной к точке *C* рамы и к гвоздю *E*, вбитому в стену на одной вертикали с *A*, причем $\angle ECA = \alpha$, $\angle BDC = \beta$ (рис. 1.3). Определить натяжение веревки и опорные реакции. Данные взять из табл. 1.3.

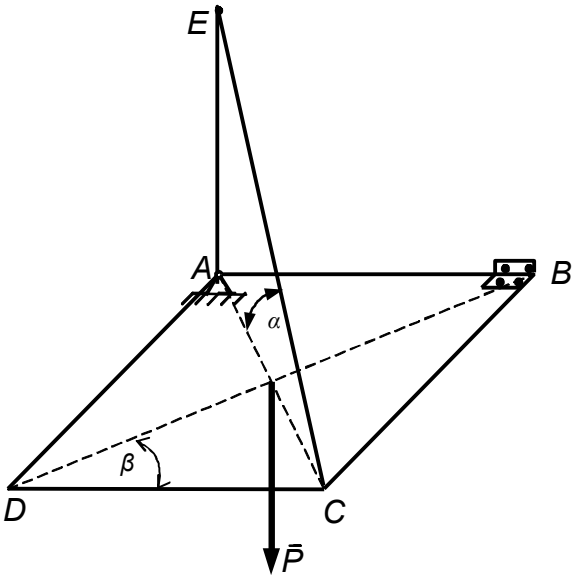


Рис. 1.3. Расчетная схема к задаче С 3.1

Таблица 1.3

Числовые данные к задаче С 3.1

Сила, углы	Номер варианта					
	1	2	3	4	5	6
P, Н	2	1	2	1	2	1
α	45°	60°	60°	30°	45°	60°
β	30°	45°	30°	30°	45°	60°

Задача С 3.2

На горизонтальный вал *AB* насажено зубчатое колесо радиуса *R*. К валу приложена пара сил с моментом *M*. К колесу под углом α к горизонту приложена сила *F*, удерживающая вал в равновесии (рис. 1.4). Определить опорные реакции в точках *A* и *B*, а также вращающий момент *M*, если $AC = 1/3\,AB$. Числовые данные взять из табл. 1.4.

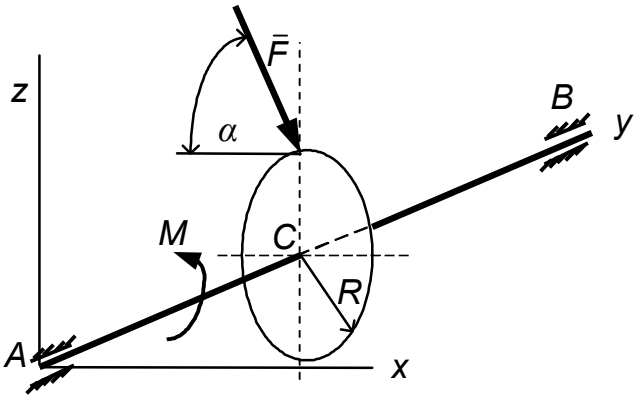


Рис. 1.4. Расчетная схема к задаче С. 3.2

Таблица 1.4

Числовые данные к задаче С 3.2

Сила, радиус, угол	Номер варианта					
	1	2	3	4	5	6
F, кН	1	3	2	1	2	3
R, м	0,5	0,4	0,4	0,2	0,5	0,3
α	30^0	45^0	60^0	60^0	30^0	-

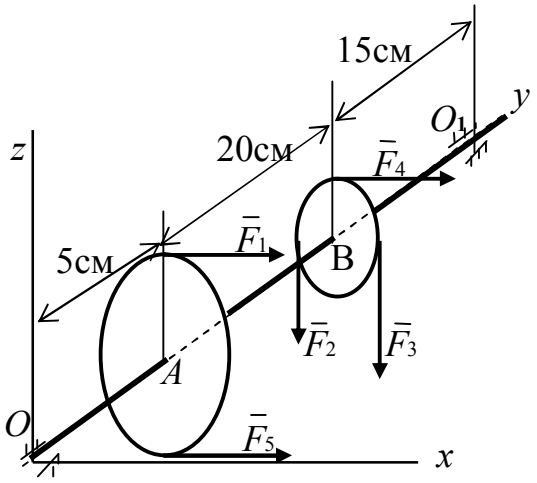


Рис. 1.5. Расчетная схема к задаче С 3.3

Задача С 3.3

Силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$ приложены к двум дискам, насаженным на вал OO_1. Плоскости дисков параллельны плоскости O_{XZ}. Направления сил указаны на рис. 1.5. Найти опорные реакции. Данные взять из табл. 1.5.

Таблица 1.5

Числовые данные к задаче С 3.3

Силы, приложенные к дискам	Номер варианта					
	1	2	3	4	5	6
F_1, Н	-	1	2	1	4	5
F_2,Н	5	4	3	2	1	-
F_3, Н	2	-	1	1	4	1
F_4, Н	3	2	-	2	1	3
F_5, Н	6	4	2	-	-	1

Задача С 3.4

Диск насажен на коленчатый вал, одно колено которого лежит в плоскости *xOy*, другое в плоскости *zOx*. Силы $\overline{F}_3$ и $\overline{F}_4$ направлены по касательной к диску. Радиус диска *R*. Длины всех отрезков вала равны *L*=1м. Силы приложены к диску и валу под углом $\alpha = 45°$ к горизонту (рис. 1.6). Определить опорные реакции, необходимые данные взять из табл. 1.6.

Таблица 1.6

Числовые данные к задаче С 3.4

Силы	Номер варианта					
	1	2	3	4	5	6
F_1, Н	1	3	5	6	4	2
F_2, Н	-	1	3	-	2	4
F_3, Н	6	1	-	2	-	1
F_4, Н	2	4	1	-	1	2
F_5, Н	3	-	2	3	3	-

Задача С 3.5

Однородная равносторонняя плита *ABC* весом *P* опирается на гладкую вертикальную стену и удерживается в горизонтальном положении веревками *AE*, *BK* и *CD*. К плите приложена вертикальная сила *Q*. Определить натяжение веревок (рис. 1.7). Необходимые данные взять из табл. 1.7.

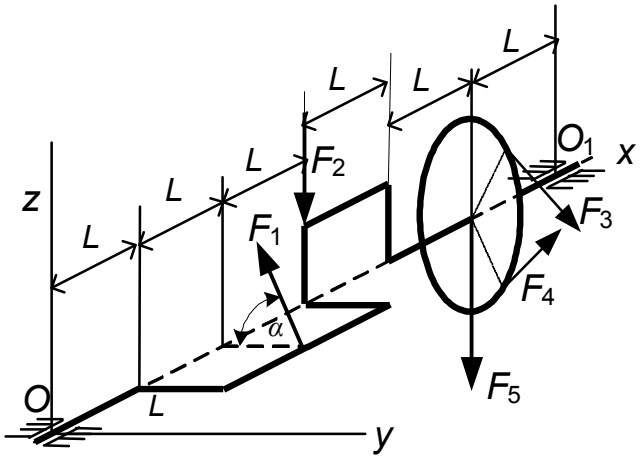


Рис. 1.6. Расчетная схема к задаче С 3.4

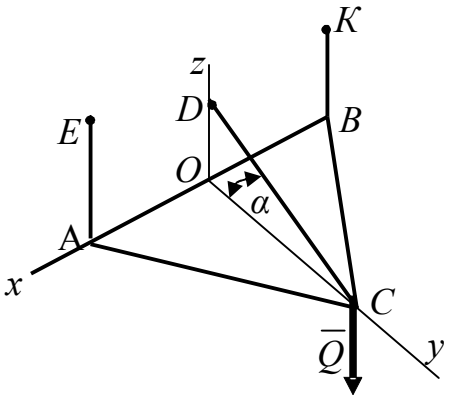


Рис. 1.7. Расчетная схема к задаче С 3.5

Таблица 1.7

Числовые данные к задаче С 3.5

Силы, расстояние, угол	Номер варианта					
	1	2	3	4	5	6
P, Н	2	3	2	1	2	4
Q, Н	1	2	1	2	1	2
OC, м	3	1	2	3	6	4
α	30°	60°	45°	30°	60°	45°

1.4. Центр тяжести

Координата центра тяжести тела определяется по формулам:

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{m}, \quad y_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{m}, \quad z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{m}. \qquad (1.12)$$

Если тело однородно, то координаты его центра тяжести определяют по формулам:

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i V_i}{V}, \quad y_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i V_i}{V}, \quad z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i V_i}{V}. \qquad (1.13)$$

Координаты центра тяжести тонких однородных поверхностей (имеющих постоянный вес единицы площади) определяют по формулам:

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i S_i}{S}, \quad y_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i S_i}{S}, \quad z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i S_i}{S}. \qquad (1.14)$$

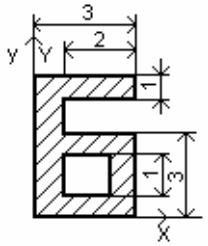
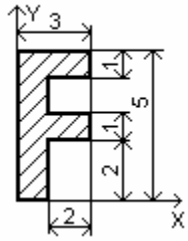
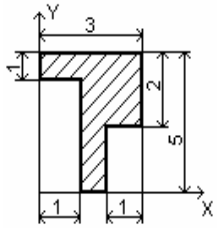
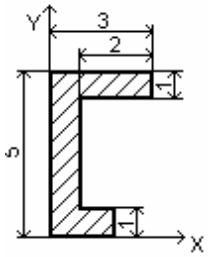
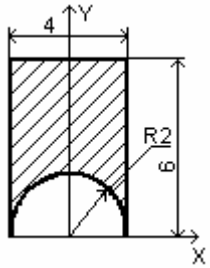
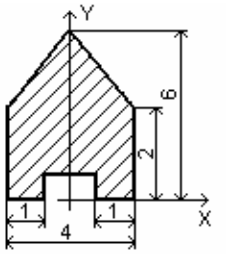
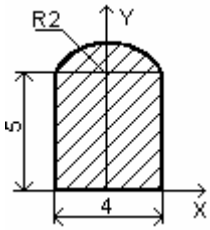
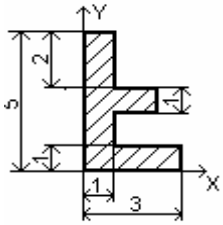
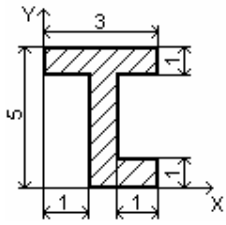
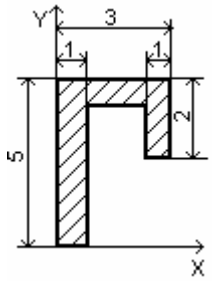
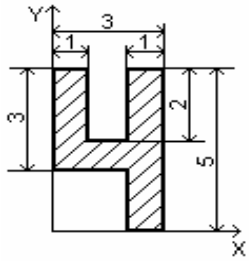
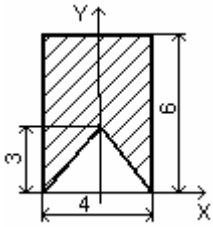
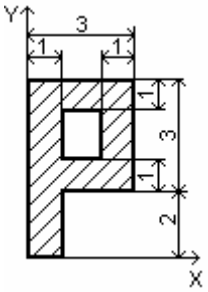
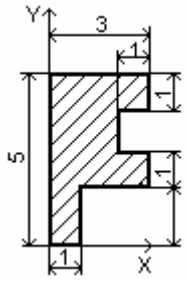
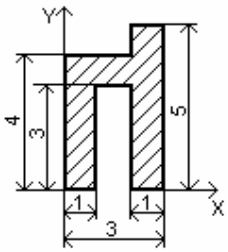
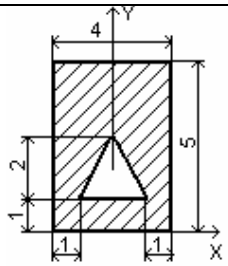
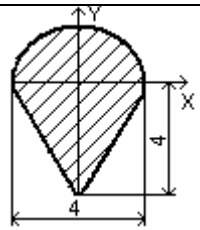
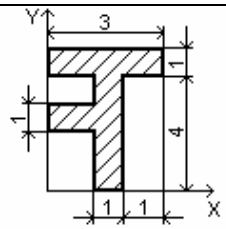
Аналогичные формулы применяются для определения координат центра тяжести тонких однородных фигур.

При нахождении центра тяжести тела (фигуры) с отверстиями применяют формулы (1.12), (1.13), (1.14), считая вес, объем или площадь, соответствующую вырезанной части, отрицательной. Для криволинейных фигур, разбиваемых на бесконечно малые элементы, суммы заменяются интегралами.

Задачи

Задача С 4.1

Определить координаты центра тяжести плоских фигур, приведённых на рис. 1.8.

№	Схема	№	Схема	№	Схема
1		3		5	
2		4		6	
7		13		19	
8		14		20	
9		15		21	
10		16		22	

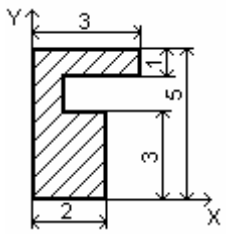
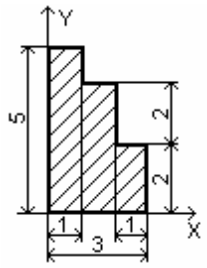
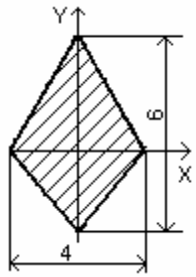
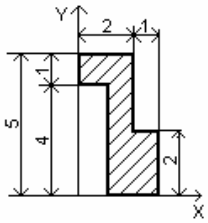
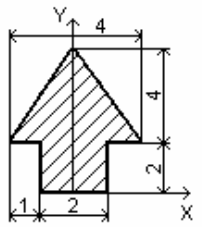
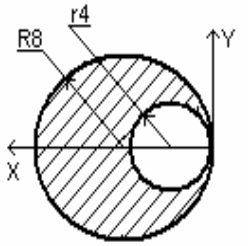
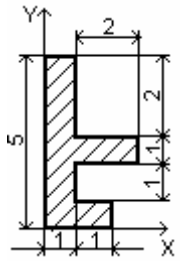
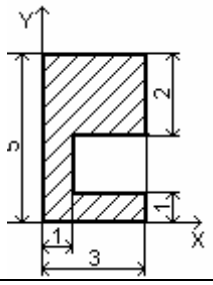
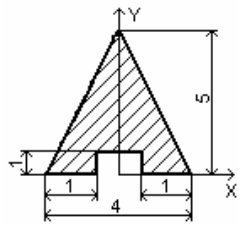
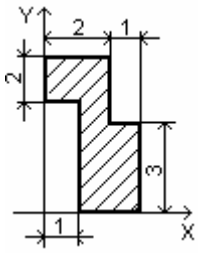
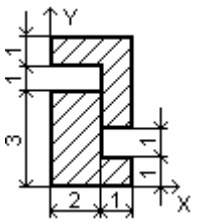
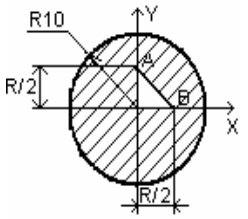
11		17		23	
12		18		24	
25		27		29	
26		28		30	

Рис. 1.8. Схемы плоских фигур к задаче С 1.4

2. КИНЕМАТИКА

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение точки и твердого тела вне зависимости от действующих на него сил.

2.1. Кинематика точки

Задачами кинематики точки являются изучение способов задания движения точки и определения кинематических параметров этого движения. Основными характеристиками движения точки являются ее траектория, скорость и ускорение. Движение точки задается тремя способами: естественным, координатным и векторным.

При естественном способе заранее известна траектория точки, задаются начало отсчета дуговой координаты с указанием положительного направления отсчета, закон движения точки по заданной траектории $S = S(t)$.

Вектор скорости точки:

$$\overline{V} = \overline{\tau} \cdot V, \tag{2.1}$$

где V определяется как первая производная от дуговой координаты;

$\overline{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории точки в сторону возрастания S.

Вектор полного ускорения точки при естественном способе задания ее движения определяется по формуле:

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n, \tag{2.2}$$

где $\overline{a}_\tau$ – вектор касательного ускорения $\overline{a}_\tau = \overline{\tau} \cdot \dfrac{dV}{dt}$;

$\overline{a}_n$ – вектор нормального ускорения точки $\overline{a}_n = \overline{n} \cdot \dfrac{V^2}{\rho}$;

$\overline{n}$ – единичный вектор, направленный к центру кривизны траектории;

ρ – радиус кривизны траектории.

Если $V = \text{const}$ $(a_\tau = 0)$, то движение точки называется равномерным. Закон движения имеет вид $S = S_0 + V \cdot t$, при криволинейном движении полное ускорение равно нормальному ускорению: $a = a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$.

Если $a_\tau = \text{const}$, то движение точки называется равнопеременным. В этом случае скорость точки равна $V = V_0 + a_\tau t$, закон движения за-

писывается уравнением: $S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$, при криволинейном движении полное ускорение равно: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

При координатном способе задания движения точки известны зависимости координаты точки от времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{2.3}$$

Исключив из уравнения параметр времени, получим уравнение траектории движения точки.

Вектор скорости точки при координатном способе задания ее движения определяется по формуле:

$$\overline{V} = \overline{i} \cdot V_x + \overline{j} \cdot V_y + \overline{k} \cdot V_z, \tag{2.4}$$

где $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$ – проекции скорости на оси координат.

$\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – орты осей координат *x, y, z*.

Величина вектора скорости:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \tag{2.5}$$

Направление вектора скорости устанавливается по направляющим косинусам:

$$\cos(\angle \overline{V}\overline{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\angle \overline{V}\overline{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\angle \overline{V}\overline{k}) = \frac{V_z}{V}. \tag{2.6}$$

Вектор ускорения точки при координатном способе задания движения определяется по формуле:

$$\overline{a} = \overline{i} \cdot a_x + \overline{j} \cdot a_y + \overline{k} \cdot a_z, \tag{2.7}$$

где $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}$, $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y}$, $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}$ – проекции ускорений на оси координат.

Направление вектора ускорения устанавливается по направляющим косинусам:

$$\cos(\angle \overline{a}\overline{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\angle \overline{a}\overline{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\angle \overline{a}\overline{k}) = \frac{a_z}{a}. \tag{2.8}$$

При движении точки в плоскости *Oxy* модуль касательного ускорения точки равен:

$$a_\tau = \left| \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} \right|. \qquad (2.9)$$

Модуль нормального ускорения равен:

$$a_n = \left| \frac{V_x a_y - V_y a_x}{V} \right|. \qquad (2.10)$$

Задачи

Задача К 1.1

Найти уравнение траектории точки, а также ее скорость и ускорение в момент пересечения оси *Oy,* если уравнения движения заданы в виде: $x = t^2 - 1$ (см); $y = 2t$ (см).

Задача К 1.2

Движение снаряда определяется уравнениями $x = 300t$ (м); $y = 400t - 5t^2$ (м). Найти уравнение траектории, время полета снаряда и начальную скорость.

Задача К 1.3

Длина линейки эллипсографа *AB* = 40 см, длина кривошипа *OC* = 20 см, *AC*=*CB*, *CM*=10 см. Кривошип равномерно вращается вокруг оси *O*: $\varphi = \omega t$ (рад). Найти уравнение траектории, скорость точки *M* (рис. 2.1).

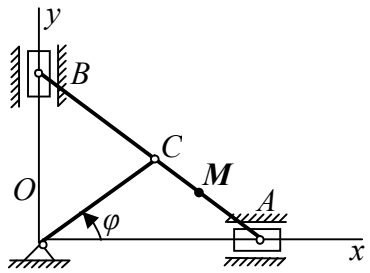


Рис. 2.1. Расчетная схема к задаче К 1.3

Задача К 1.4

Найти уравнение траектории точки, а также ее скорость и ускорение в момент пересечения оси *Oy*, если уравнения движения заданы в виде: $x = \sin \pi t$ (см); $y = 2\cos \pi t$ (см).

Задача К 1.5

Движение бомбы, сброшенной с самолета, задано уравнениями: $x = 40t$ (м), $y = 5t^2$ (м). Найти уравнение траектории, дальность полета, время падения и начальную скорость, если самолет летит на высоте h = 300 м. Начало координат взято в точке сброса бомбы.

Задача К 1.6

Найти уравнение траектории точки, а также ее скорость и ускорение в момент времени, когда скорость параллельна оси *Oy*, если уравнения движения заданы в виде: $x = \sin \pi t$ (см); $y = 2\cos \pi t$ (см).

Задача К 1.7

Точка движется равноускоренно по дуге окружности $R = 2$ м с начальной скоростью $V_0 = 0{,}5$ м/с. Определить скорость, касательное, полное и нормальное ускорение точки через 20 с после начала движения, если путь, пройденный точкой за 30 с равен 165 м.

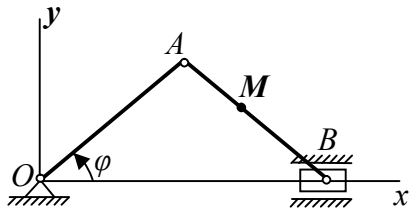


Рис. 2.2. Расчетная схема к задаче К 1.8

Задача К 1.8

Определить уравнение траектории, скорость и ускорение точки *M*, середины шатуна *AB*, если *OA*=*AB*=4*L* (рис. 2.2). Уравнение вращения кривошипа: $\varphi = 2\omega \cdot t$ (рад).

Задача К 1.9

Точка описывает криволинейную траекторию по закону $S = 3t^3$ (м). Найти скорость и полное ускорение точки в момент, когда угол между ними равен 45°, если радиус кривизны траектории точки в этот момент равен 24 м.

Задача К 1.10

При отходе от станции скорость поезда возрастает равномерно и достигает 72 км/ч через 3 минуты после отхода поезда. Путь расположен на закруглении радиуса 800 м. Определить касательное, полное и нормальное ускорение поезда через 2 минуты после отхода его от станции.

Задача К 1.11

По окружности радиуса 8 м движется точка по закону $S = 4t^3$ (м). Найти скорость и полное ускорение точки в тот момент, когда угол между ними равен 30°.

Задача К 1.12

Определить скорость и ускорение точки, уравнение движения которой имеет вид: $x = b\cos^2 t$ (м), $y = b\sin^2 t$ (м).

Задача К 1.13

Точка описывает криволинейную траекторию по закону $S = 2t^3$ (м). Найти скорость и полное ускорение точки в момент, когда угол между ними равен 45°, если радиус кривизны траектории точки в этот момент равен 4 м.

Задача К 1.14

Найти траекторию точки *M* шатуна кривошипно-шатунного механизма, если *OA* = *AB* = 60 см, *MB* = 1/3*AB*. Кривошип вращается равномерно: $\varphi = 4\omega \cdot t$ (рад). Определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi = 0$ (рис. 2.3).

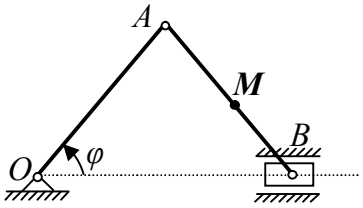


Рис. 2.3. Расчетная схема к задаче К 1.14

Задача К 1.15

Бомба, сброшенная с самолета, движется согласно уравнениям: $x = V_0 t$ (м), $y = h - gt^2/2$ (м). Найти траекторию точки, скорость бомбы (величину и направление) в момент, когда она пересечет ось *Ox*, дальность полета.

Задача К 1.16

Уравнение движения пальца кривошипа в период пуска имеет вид: $x = 75\cos(4t^2)$ (см), $y = 75\sin(4t^2)$ (см). Найти скорость, касательное и нормальное ускорение пальца кривошипа.

Задача К 1.17

Вагон движется равнозамедленно с ускорением $a = 0{,}1\ м/с^2$ по закруглению радиусом 200 м. Определить полное ускорение вагона через 10 с после начала движения, если его начальная скорость равна 18 км /ч.

Задача К 1.18

Точка движется по окружности радиусом 8 м, причем ее нормальное ускорение равно $4t^2\,(м/с^2)$. Найти скорость и полное ускорение этой точки, определить закон ее движения по траектории, отсчитывая дугу *S* от начального положения.

2.2. Поступательное и вращательное движения твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором всякая прямая, неизменно связанная с этим телом, остается параллельной своему начальному положению.

При поступательном движении твердого тела все его точки имеют одинаковые траектории, а также равные по модулю и совпадающие по направлению скорости и ускорения в каждый данный момент времени. Поэтому изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения какой-либо его одной точки, т.е. к задаче кинематики точки. Прямолинейное движение является частным случаем поступательного движения.

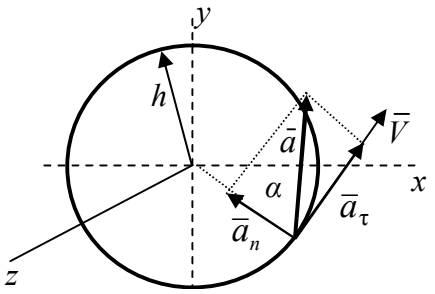


Рис. 2.4. Направления векторов скорости и ускорения

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором хотя бы две точки, неизменно связанные с телом, остаются во время движения неподвижными. Прямая, проведенная через эти неподвижные точки, называется *осью вращения*.

Характеристиками вращательного движения твердого тела являются угол поворота φ, угловая скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ и угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$.

Вращение тела с постоянной угловой скоростью ($\omega = const$) называется *равномерным*.

Уравнение равномерного вращения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t\,. \qquad (2.11)$$

Вращение тела, при котором угловое ускорение постоянно, называете равнопеременным ($\varepsilon = \text{const}$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$). Его уравнение имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (2.12)$$

Скорость точек тела при вращательном движении (рис. 2.4) относительно оси *0z* определяется по формуле:

$$V = \omega \cdot h\,, \tag{2.13}$$

где h – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения.

Касательное и нормальное ускорения определяются по формулам:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h\,, \qquad a_n = \omega^2 h\,. \tag{2.14}$$

Полное ускорение равно:

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{2.15}$$

Угол α определяется выражением:

$$\mathrm{tg}\alpha = \varepsilon / \omega^2\,. \tag{2.16}$$

Для передачи вращательного движения от одного тела (вала) к другому используются зубчатые передачи, в которых оси всех колес неподвижны (рис. 2.5,*а*, рис. 2.5,*б*).

Число зубьев z пропорционально диаметрам колес: $r_2 / r_1 = z_2 / z_1$.

При внешнем зацеплении направление вращения изменяется (см. рис. 2.5, *а*), поэтому:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}\,. \tag{2.17}$$

При внутреннем зацеплении (рис. 2.5,*б*):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}\,. \tag{2.18}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}\,, \tag{2.19}$$

где k – число внешних зацеплений между колесами *1* и *n*.

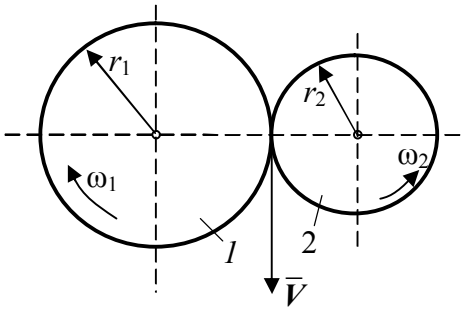


Рис. 2.5,а. Передача с внешним зацеплением колес

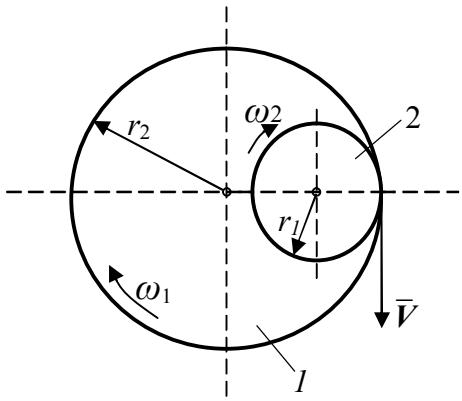


Рис. 2.5,б. Передача с внутренним зацеплением колес

Задачи

Задача К 2.1

Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно. Через 10 мин после начала движения оно имеет угловую скорость, соответствующую 120 об/ мин. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10 мин?

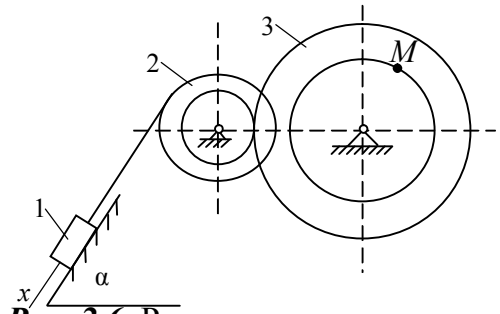


Рис. 2.6. Расчетная схема к задаче К 2.2

Задача К 2.2

По заданному уравнению движения груза 1: $x = 3t^2$ (см) найти скорость и ускорение точки M (рис. 2.6) в момент t_1=1с, если известно, что r_2 =15 см, R_2=r_3=24 см, R_3 =30 см, α=45°.

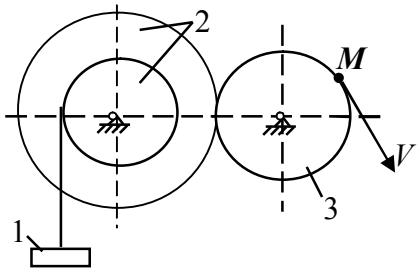


Рис. 2.7. Расчетная схема к задаче К 2.3

Задача К 2.3

Линейная скорость точки M: V= 50t (см/с). Найти скорость и ускорение груза 1 (рис. 2.7) в момент времени t_1= 4 с, если r_3= 25 см, r_2= 20 см, R_2= 50 см.

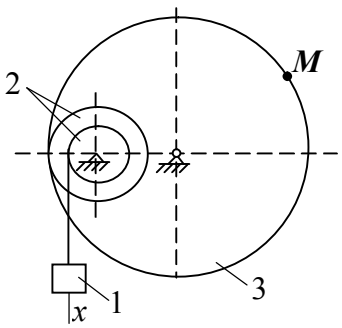


Рис. 2.8. Расчетная схема к задаче К 2.4

Задача К 2.4

По заданному уравнению прямолинейного движения груза: $x = 2t^2 + 3t$ (см) найти скорость и ускорение точки M в момент $t_1 = 2\,c$, если r_3=40 см, r_2=11 см, R_2=16,5 см (рис. 2.8).

Задача К 2.5

Линейная скорость точки M:

$V = 50t$ (см/с). Найти скорость и ускорение тела 1 (рис. 2.9) в момент времени $t_1 = 5\,c$, если R_3=20 см, r_3=15 см, r_2=15 см, R_2=20 см (рис. 2.9).

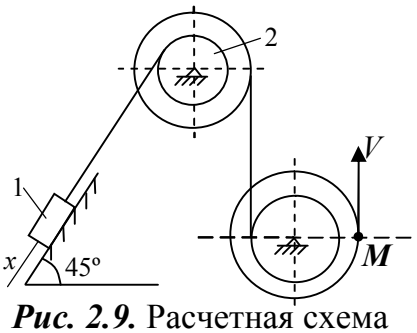


Рис. 2.9. Расчетная схема к задаче К 2.5

Задача К 2.6

Угловая скорость винта самолёта, равная в данный момент 100π c^{-1}, через 5 с после выключения мотора становится 80π c^{-1}. Считая вращение пропеллера равнозамедленным, определить его угловое ускорение, скорость и ускорение точки в момент t_1= 8 с, если расстояние от точки до оси вращения 2 м.

Задача К 2.7

Задано уравнение прямолинейного поступательного движения груза 1: $x = 4t^3$(см) (рис. 2.10). Найти скорость и ускорение точки M в момент времени 5 с, если r_2= 15 см, R_2= 25 см, r_3= 20 см.

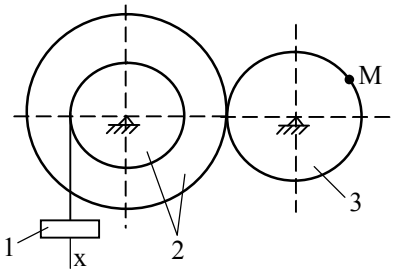


Рис. 2.10. Расчетная схема к задаче К 2.7

Задача К 2.8

Диск паровой турбины, вышедший из состояния покоя, вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = bt^3$ (рад). Через 5 секунд его угловая скорость ω =150π c^{-1}.Определить угловое ускорение диска, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 10 см от оси вращения, в момент времени t_1=3 с.

Задача К 2.9

Задано уравнение поступательного движения рейки 4: $x = 4(7t - t^2)$ (см). Найти для момента времени t_1=1с скорости и ускорения точек A и B, скорость тела 5. Радиусы колёс соответственно равны: r_1= 2 см, R_1= 4 см, r_2= 6 см, R_2= 8 см, r_3=12 см, R_3=16 см (рис. 2.11).

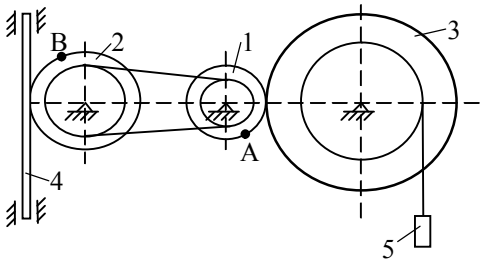


Рис. 2.11. Расчетная схема к задаче К 2.9

Задача К 2.10

Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 3\pi \sin(\pi/6)t$ (рад). Определить скорость и ускорение точки тела, отстоящей от оси вращения на расстояние 5 м, в момент времени t_1= 2 с.

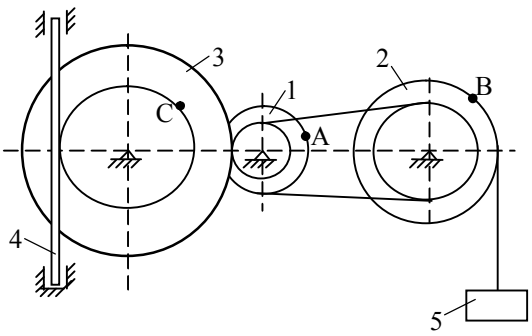


Рис. 2.12. Расчетная схема к задаче К 2.11

Задача К 2.11

Задано уравнение скорости поступательного движения груза 5: $V_5 = 2(t^2\text{-}3)$ (см/с). Найти для момента времени t_1=1 с, скорости точек *A* и *C*, а также ускорения точки *B* и рейки 4 (рис. 2.12). Радиусы колёс равны соответственно: r_1= 2 см, R_1= 4 см, r_2= 6 см, R_2= 8 см, r_3=12 см, R_3=16 см.

Задача К 2.12

Задано уравнение вращения колеса 1: $\varphi_1 = 2t^2\text{-}9$ (рад). Найти угловую скорость и угловое ускорение колеса 2, а также скорость рейки 4 и груза 5, ускорение точки *C* и груза 5 (рис. 2.13).

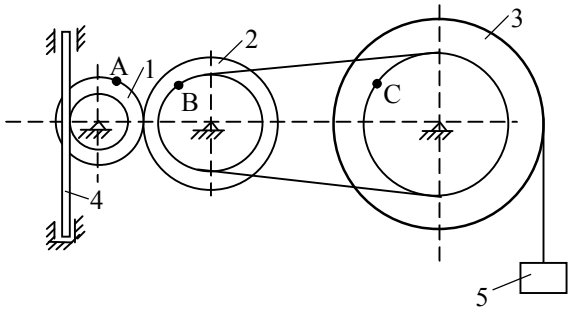


Рис. 2.13. Расчетная схема к задаче К 2.12

Радиусы колёс соответственно равны: r_1= 4 см, R_1= 8 см, r_2=12 см, R_2= 24 см, r_3=18 см, R_3=32 см.

Задача К 2.13

Дано: r_1=5 см, r_3=10 см. Уравнение вращательного движения диска 1: $\varphi = t^2+3t$ (рад). Найти скорость и ускорение точки *M* (рис. 2.14) в момент t_1=2 с.

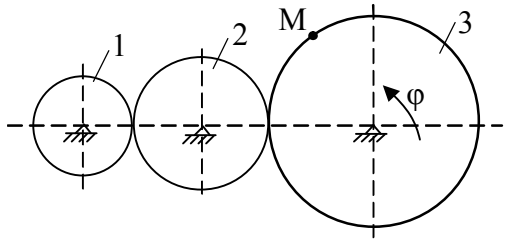


Рис. 2.14. Расчетная схема к задаче К 2.13

Задача К 2.14

Задан закон изменения скорости колеса 2: $\varphi_2 = 7t - 3t^2$ (рад). Найти для момента времени t_1=1 с, угловую скорость колеса 3, скорость груза 5, ускорение точки *A* и рейки 4 (рис. 2.15). Радиусы колёс соответст-

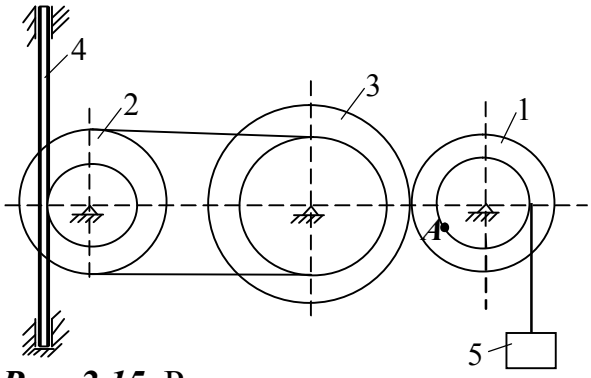


Рис. 2.15. Расчетная схема к задаче К 2.14

венно равны r_1=5 см, R_1=8 см, r_2= 4 см, $R_2 = r_3 = 6$ см, R_3= 12 см.

Задача К 2.15

В механизме домкрата при вра-щении рукоятки начинают вращаться шестерни 1, 2, 3, 4 и 5, которые приводят в движение зубчатую рейку домкрата. Определить скорость последней, если рукоятка *A* делает 30 об/мин. Число зубьев шестерён: z_1= 6, z_2= 24, z_3= 8, z_4= 32; радиус пятой шестерни r_5= 4 см (рис. 2.16).

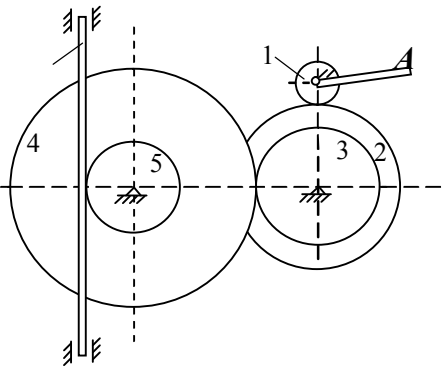


Рис. 2.16. Расчетная схема к задаче К 2.15

Задача К 2.16

Точка *A* шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью 50 см/с, а некоторая точка *B* взятая на одном радиусе с точкой *A* (рис. 2.17), движется со скоростью 10 см/с; расстояние *AB* =50 см. Определить угловую скорость и диаметр шкива.

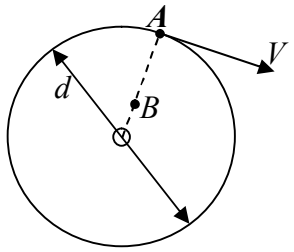


Рис. 2.17. Расчетная схема к задаче К 2.16

Задача К 2.17

Задано уравнение вращательного движения колеса 3: $\varphi_3 = 3t - t^2$ (рад). Найти для момента времени t_1=2 с скорости рейки 4 и груза 5, а также ускорения точки *B* (рис. 2.18). Радиусы колёс соответственно равны: r_1=2 см, R_1= 3 см, r_2= 4 см, R_2= 6 см, r_3= 6 см, R_3= 8 см.

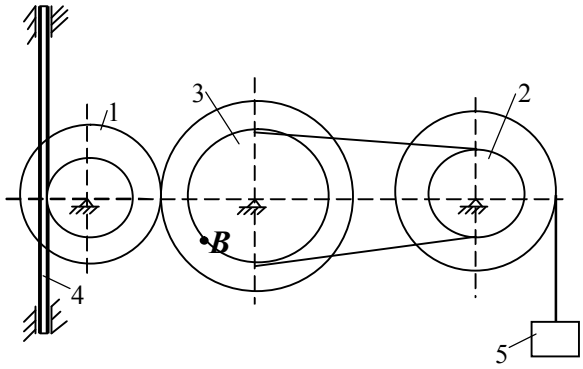


Рис. 2.18. Расчетная схема к задаче К 2.17

Задача К 2.18

Задан закон изменения угловой скорости колеса 1: $\omega_1 = 5t - t^2$ (c^{-1}). Найти для момента времени t_1=1 с, скорость груза 5 и скорость точки *B* (рис. 2.19), а также ускорение точки *C*. Радиусы колес равны соответственно: r_1=10 см, R_1=12 см, r_2= 16 см, R_2= 20 см, r_3= 16 см, R_3= 24 см.

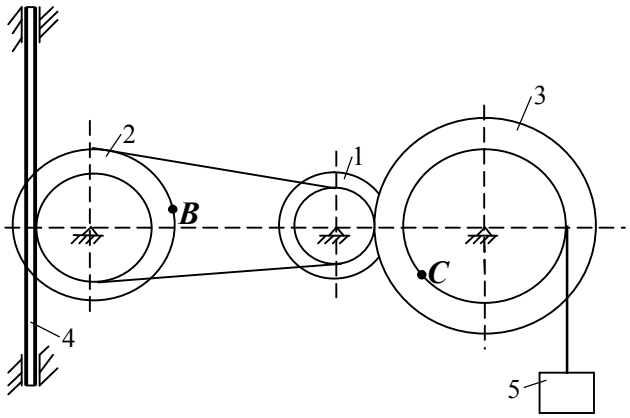


Рис. 2.19. Расчетная схема к задаче К 2.18

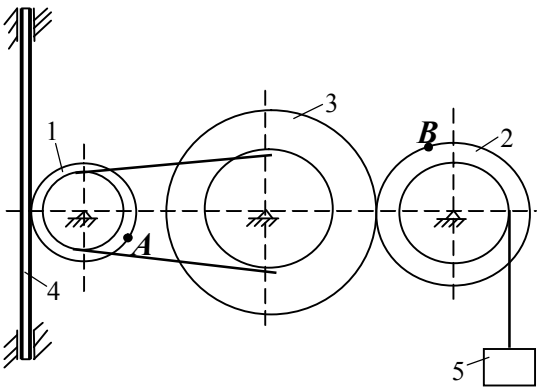


Рис. 2.20. Расчетная схема к задаче К 2.19

Задача К 2.19

Задано уравнение поступательного движения груза 5: $x = 3(5t\text{-}t^2)$ (см). Найти для момента времени t_1=1 с скорость движения рейки 4, скорости и ускорения точек *A* и *B* (рис. 2.20). Радиусы колёс равны соответственно: r_1= 5 см, R_1= r_2= 8 см, R_2= r_3=10 см, R_3=15 см.

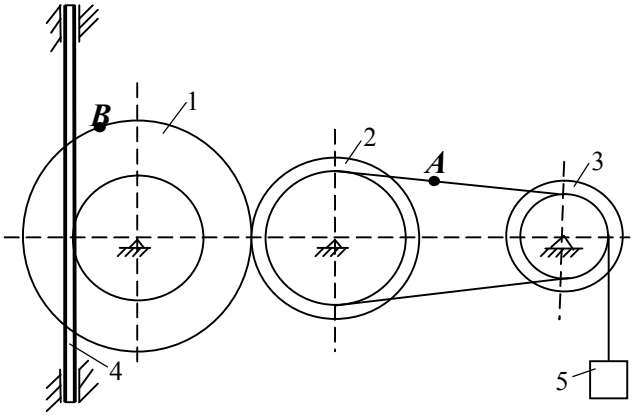


Рис. 2.21. Расчетная схема к задаче К 2.20

Задача К 2.20

Задан закон изменения скорости рейки 4: V_4= t^2-6 (см/с). Найти для момента времени t_1=1с скорость точки *A*, скорость груза 5, а также ускорение точки *B* и ускорение груза 5 (рис. 2.21).

2.3. Сложное движение точки

Главной задачей при изучении сложного движения точки является установление зависимостей между кинематическими характеристиками абсолютного, переносного и относительного движения.

Абсолютным называется движение точки относительно неподвижной системы отсчёта, *относительным* – по отношению к подвижной системе отсчёта.

Движение подвижной системы отсчёта по отношению к неподвижной является для движущейся точки *переносным* движением.

Абсолютная скорость $\overline{V}_a$ точки при сложном движении равна векторной сумме переносной $\overline{V}_e$ и относительной $\overline{V}_r$ скоростей:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r . \qquad (2.20)$$

Модуль абсолютной скорости V определяется по формуле:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos(\angle V_e, V_r)} . \qquad (2.21)$$

Абсолютное ускорение точки при сложном движении равно векторной сумме переносного, относительного ускорений и ускорения Кориолиса:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_k . \qquad (2.22)$$

Ускорение Кориолиса определяется по формуле:

$$\overline{a}_k = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r . \qquad (2.23)$$

Модуль ускорения Кориолиса равен:

$$a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\omega V_r) . \qquad (2.24)$$

Когда переносное движение поступательное (ω_e=0) и ускорение Кориолиса обращается в нуль, тогда:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r . \qquad (2.25)$$

Определение направления вектора $\overline{a}_k$ в пространстве можно найти по правилу Н.Е. Жуковского Оно состоит в следующем (см. рис. 2.22):

1) проектируем вектор относительной скорости $\overline{V}_r$ на плоскость (π), перпендикулярную к вектору $\overline{\omega}_e$;

2) поворачиваем полученный вектор $(\overline{V}_r)_\pi$ в плоскости π на угол 90° по направлению переносного вращения. Полученное направление показывает направление вектора $\overline{a}_k$.

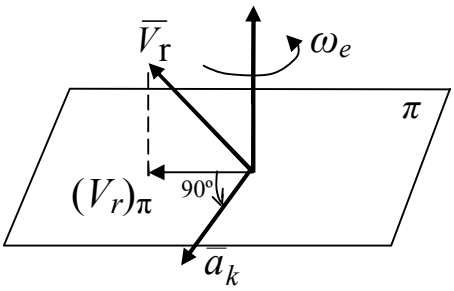


Рис. 2.22. Вектор ускорения Кориолиса

Ускорение Кориолиса равно нулю в следующих случаях:

1) угловая скорость ω_e равна нулю, то есть переносное движение является поступательным;

2) относительная скорость равна нулю;

3) вектора $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}$ коллинеарны, то есть $\sin(\overline{V}\overline{\omega}_e)=0$.

При решении задач на сложное движение точки рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Разложить сложное движение на составляющие, определив относительное и переносное движение и, если возможно, то и абсолютное.

2. Изобразить точку в положении, заданном в условии задачи.

3. Мысленно остановив переносное движение, определить скорость и ускорение точки в относительном движении.

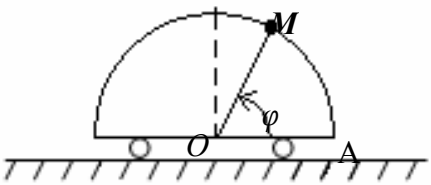
4. Мысленно остановив относительное движение, найти угловую скорость переносного движения, а также переносную скорость и переносное ускорение точки.

5. По известным векторам $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$ найти кориолисово ускорение.

6. Применив теоремы сложения скоростей и ускорений, найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки. При этом часто пользуются методом проекций.

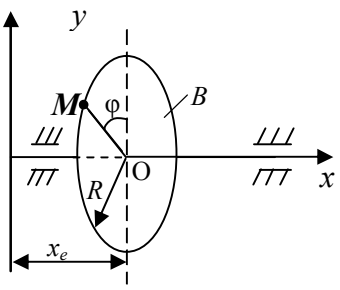
Задачи

Задача К 3.1



Стержень OM вращается (рис. 2.23) по закону: $\varphi = 4t^2$ (рад), $OM = 20$ см. Определить абсолютную скорость и ускорение точки M при $t_1 = 2$ с, если $\angle AOM$ в этот момент равен π, а скорость и ускорение тележки направлены влево и соответственно равны $4\,м/с$, $40\,м/с^2$.

Рис. 2.23. Расчетная схема к задаче К 3.1



Задача К 3.2

Известно уравнение переносного движения тела *B*: $x_e = 2t^2$ (м) и относительного вращательного движения стержня *OM*: $\varphi = 2t^2$ (рад) (рис. 2.24). Найти абсолютную скорость и ускорение точки *M* при $t_1 = 1$ с, если *R*=40 см.

Рис. 2.24. Расчетная схема к задаче К 3.2

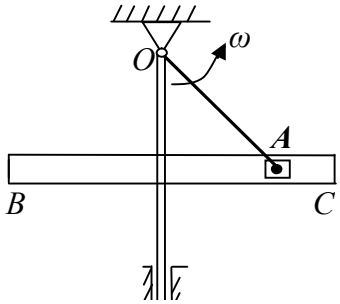


Рис. 2.25. Расчетная схема к задаче К 3.3

Задача К 3.3

Кривошип *OA*=0,2 м кривошипно-кулисного механизма равномерно вращается вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости механизма, с угловой скоростью $\omega = 3\pi^{-1}(c^{-1})$. Конец *A* кривошипа соединен шарнирно с ползуном, перемещающимся в прорези *BC*, и сообщает кулисе поступательное движение (рис. 2.25). Определить скорость и ускорение поступательного движения кулисы в момент, когда $\varphi = \pi / 4$.

Задача К 3.4

Уравнение относительного вращения стержня *OM*: $\varphi_r = (\pi / 2) \cdot \sin(\pi / 2) \cdot t$ (рад), уравнение переносного движения пластины (рис. 2.26): $x_e = 3t^2$ (м). Найти абсолютную скорость и ускорение точки М в момент $t_1 = 1$ с, если *R* =1 м.

Задача 3.5

По известному уравнению переносного движения тела *A*: $X_e = 2t^2$ (см) и уравнению относительного движения точки *M*: $OM = S_r = t^3$ (см) найти абсолютную скорость и ускорение точки *M* (рис. 2.27) в момент $t_1 = 2c$, если $\angle BOM = 60°$.

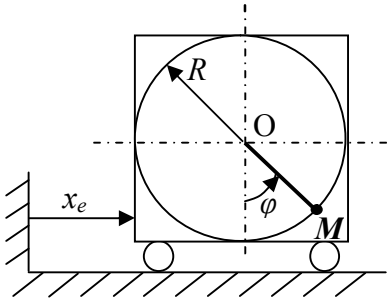


Рис. 2.26. Расчетная схема к задаче К 3.4

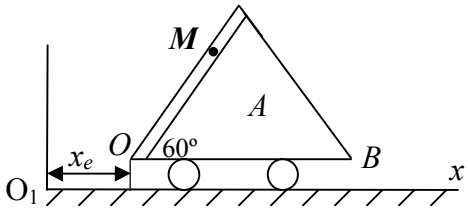


Рис. 2.27. Расчетная схема к задаче К 3.5

Задача К 3.6

На тележке, движущейся по горизонтали вправо, установлен электрический мотор, ротор которого равномерно вращается вокруг оси *Oz*, совершая 150 об/мин. Радиус ротора 30 см. Определить абсолютную скорость и ускорение точки *A*, лежащей на ободе ротора (рис. 2.28), в тот момент, когда $\varphi = \pi$, скорость и ускорение тележки равны 50 м/с и 30 м/с^2.

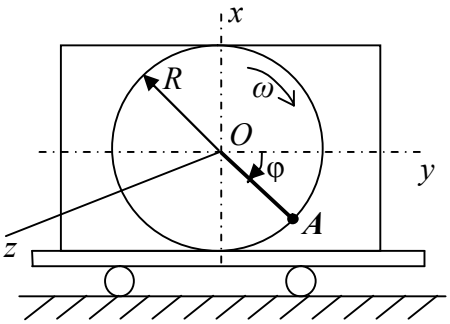


Рис. 2.28. Расчетная схема к задаче К 3.6

Задача К 3.7

По заданному уравнению переносного движения тела *A*: $x_e = 4t^2$ (м), а также уравнению относительного движения точки *M* (рис. 2.29): $OM = S_r = 3t^2$ (м) определить абсолютную скорость и ускорение точки *M*, при $t_1 = 2$ с.

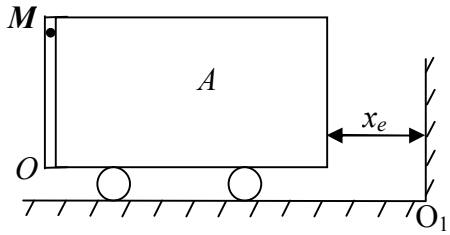


Рис. 2.29. Расчетная схема к задаче К 3.7

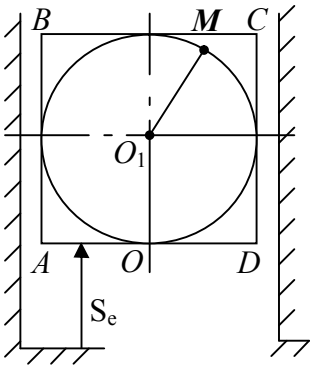


Рис. 2.30. Расчетная схема

Задача К 3.8

Уравнение переносного движения квадрата *ABCD*: $S_e = 4t^2$ (см). Уравнение относительного движения точки *M* (рис. 2.30) в кольцевой прорези: $S_r = 2 \cdot t$ (см). Найти абсолютную скорость и ускорение точки *M* в момент $t_1 = 1$ с, если $O_1M = 1$ м, $\angle OO_1M$ для этого момента равен 0.

к задаче К 3.8

Задача К 3.9

Уравнение относительного движения точки M задано: $OM = S_r = 5t^2$ (см). Переносное вращение тела относительно оси Oz задано уравнением: $\varphi_e = 2t^2$ (рад). Найти абсолютную скорость и ускорение точки М в момент $t_1 = 2$ с, если $R = 20$ см (рис. 2.31).

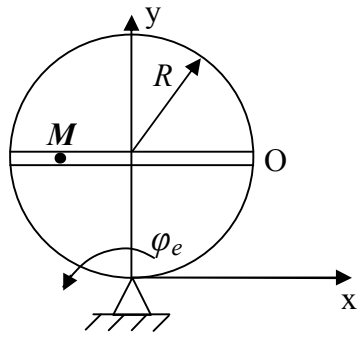


Рис. 2.31. Расчетная схема к задаче 3.9

Задача К 3.10

Радиус кольца R=20 см (рис. 2.32). Уравнение переносного вращения: $\varphi_e = 2t$ (рад). Уравнение относительного вращения стержня OM: $\varphi_r = \pi t/2$ (рад). Найти абсолютную скорость и ускорение точки M в момент $t_1 = 1$ с.

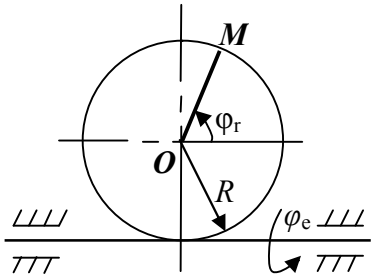


Рис. 2.32. Расчетная схема к задаче К 3.10

Задача К 3.11

Уравнение относительного вращения стержня O_1M: $\varphi_r = \pi t/2$ (рад), уравнение переносного вращения тела D (рис. 2.33) относительно оси Oz: $\varphi_e = 4t\pi$ (рад). Найти абсолютную скорость и ускорение точки M в момент $t_1 = 2$ с, если $R = 20$ см.

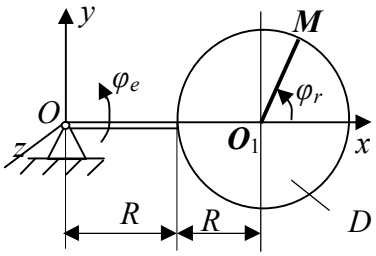


Рис. 2.33. Расчетная схема к задаче К 3.11

Задача К 3.12

Угловая скорость вращения тела A: $\omega_e = 10\,\text{с}^{-1}$, (рис. 2.34) уравнение относительного движения точки M: $S_r = 8t^2$ (см). Найти абсолютную скорость и ускорение точки M в момент $t = 2$ с.

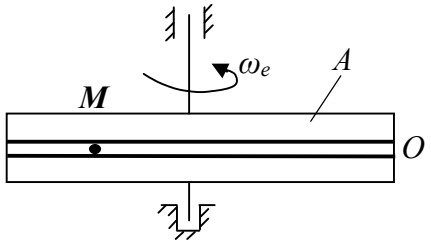


Рис. 2.34. Расчетная схема к задаче К 3.12

Задача К 3.13

Уравнение движения точки M в прорези кольца: $OM = S_r = 15t^2$ (см). Кольцо вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega_e = 2\ c^{-1}$. Найти абсолютную скорость и ускорение точки M в момент t = 2с, если R = 5 см (рис. 2.35).

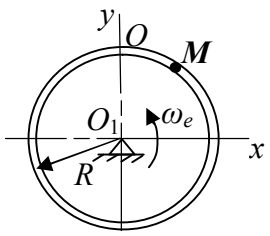


Рис. 2.35. Расчетная схема к задаче К 3.13

Задача К 3.14

Цилиндр радиусом 0,5 м вращается вокруг своей оси по закону $\varphi_e = 4t^2$ (рад). Точка M движется по образующей цилиндра (рис. 2.36) с относительной скоростью $V_r = 3t$ (м/с). Определить абсолютную скорость и ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

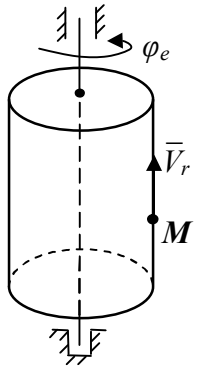


Рис. 2.36. Расчетная схема к задаче К3.14

Задача К 3.15

Прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг стороны CD с угловой скоростью $\omega_e = 2\pi$ с$^{-1}$. Вдоль стороны AB движется точка M (рис. 2.37) по закону $AM = S_r = 3\sin \pi t$ (см). AD =10 см. Определить абсолютную скорость и ускорение точки M и момент времени t_1 = 1 с.

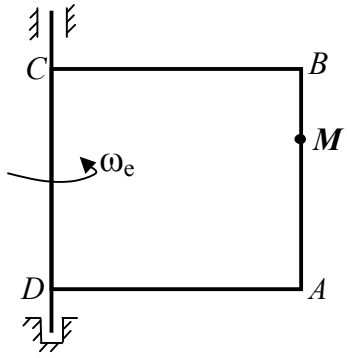


Рис. 2.37. Расчетная схема к задаче К 3.15

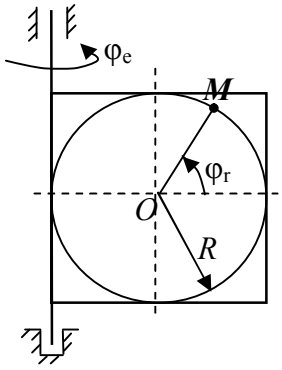


Рис. 2.38. Расчетная схема к задаче К 3.16

Задача К 3.16

Уравнение переносного вращения пластины (рис. 2.38): $\varphi_e = 5t$ (рад). Уравнение относительного вращения стержня OM: $\varphi_r = \frac{\pi}{2}t$ (рад). Найти абсолютную скорость и ускорение точки M в момент $t_1 = 2$ с, если R =10 см.

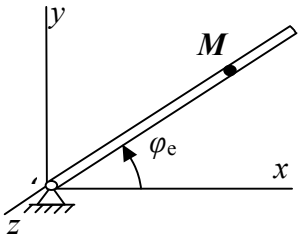


Рис. 2.39. Расчетная схема к задаче К 3.17

Задача К 3.17

Стержень вращается вокруг оси *Oz* по закону: $\varphi_e = 4t$ (рад). Вдоль стержня движется точка (рис. 2.39) по закону $OM = S_r = 2t^3$ (м). Найти абсолютную скорость и ускорение точки *M*

в момент времени $t_1 = 2$ с.

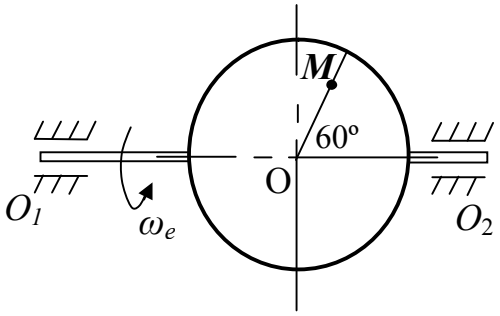


Рис. 2.40. Расчетная схема к задаче К 3.18

Задача К 3.18

По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega_e = 2t$ с$^{-1}$, в направлении от центра диска к его ободу движется точка *M* (рис. 2.40) по закону: $OM = S_r = 4t^2$ (см). Радиус *OM* составляет с осью O_1O_2 угол 60°. Определить величину абсолютного ускорения точки *M* в момент $t_1 = 1$ с.

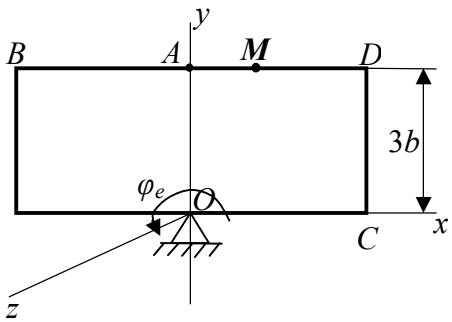


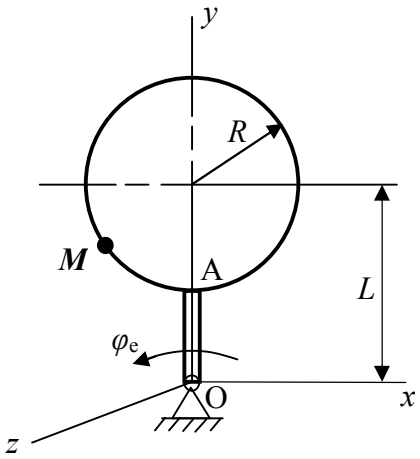
Рис. 2.41. Расчетная схема к задаче К 3.19

Задача К 3.19

Прямоугольная пластина вращается вокруг оси Oz по закону: $\varphi_e = 4(t^2 - t)$ (рад). По пластине вдоль прямой *BD* движется точка *M* по закону: $AM = S_r = 80(t^2 - t) + 40$ (см). Найти абсолютную скорость и ускорение точки *M* (рис. 2.41) в момент времени $t_1 = 2$ с, если *b* =10 см.

Задача К 3.20

Диск радиусом $R = 60$ см вращается вокруг оси Oz по закону:
$\varphi_e = 2t^2 - 3t$ (рад). По окружности радиуса *R* движется точка *M* по закону: $AM = S_r = \frac{\pi}{2} R(t^3 - 2t)$ (см). Найти абсолютную скорость и ускорение точки *M* (рис. 2.42) в момент времени $t_1 = 1$ с, если *L* =2*R*.



Задача К 3.21

Прямоугольная пластина вращается вокруг оси OO_1 по закону: φ_e=10t^2 – 5t^3 (рад). По прямой BD движется точка M по закону: $AM = S_r = 60(t^3 - 2t^2)$ (см). Найти абсолютную скорость и ускорение точки M (рис. 2.43) в момент времени $t_1 = 1$ с, если b =20 см.

Рис. 2.42. Расчетная схема к задаче К 3.20

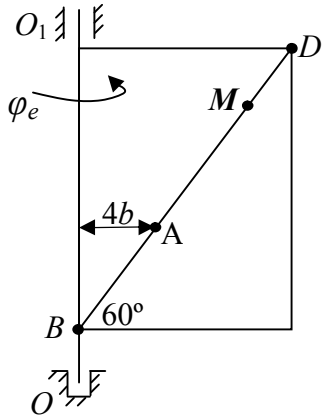


Рис. 2.43. Расчетная схема к задаче К 3.21

2.4. Плоское движение твердого тела

При плоском движении все точки тела движутся во взаимно параллельных плоскостях, параллельных некоторой заданной неподвижной плоскости. Поэтому для изучения плоского движения тела достаточно изучить движение одного плоского сечения, параллельного неподвижной плоскости. Это сечение называют *плоской фигурой*, или *сечением S*.

Плоское движение твердого тела можно разложить на два простых: поступательное, вместе с некоторым центром (точкой принятой за полюс), и вращательное вокруг оси, проходящей через этот полюс, перпендикулярной плоскости движения. Причем характеристики поступательного движения зависят от выбора полюса, а характеристики вращательного движения не зависят от выбора полюса. Параметры вращательного движения определяются углом поворота φ любого отрезка, принадлежащего плоской фигуре (сечению S), угловой скоростью ω и угловым ускорением ε. Следует иметь в виду, что ось вращения неподвижна или движется поступательно.

Скорости точек твердого тела при его плоском движении можно определить одним из следующих способов:

1. По теореме сложения скоростей. Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости поступательного

движения полюса и вращательной (линейной) скорости точки вокруг полюса:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}. \qquad (2.26)$$

Данная теорема иллюстрируется рис. 2.44.

Вектор вращательной (линейной) скорости ($\overline{V}_{BA}$), перпендикулярный отрезку *AB*, по величине равен:

$$V_{BA} = \omega \cdot AB. \qquad (2.27)$$

2. По теореме о проекциях скоростей. Проекции векторов скоростей любых двух точек твердого тела (*A* и *B*) на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.

$$пр_{AB}\overline{V}_B = пр_{AB}\overline{V}_A. \qquad (2.28)$$

3. Через мгновенный центр скоростей. При плоском движении тела в любой момент времени всегда существует единственная точка в сечении *S*, скорость которой равна нулю. Эта точка называется *мгновенным центром скоростей* (МЦС). Если известен МЦС (на рис. 2.45 это точка *P*), то скорости точек плоской фигуры находятся как произведение угловой скорости, вращения тела вокруг МЦС, на расстояния до этого центра:

$$\begin{aligned} V_B &= \omega \cdot BP, \\ V_A &= \omega \cdot AP. \end{aligned} \qquad (2.29)$$

Причем вектор скорости точки перпендикулярен отрезку, соединяющему точку с мгновенным центром скоростей ($\overline{V}_A \perp PA$, $\overline{V}_B \perp PB$).

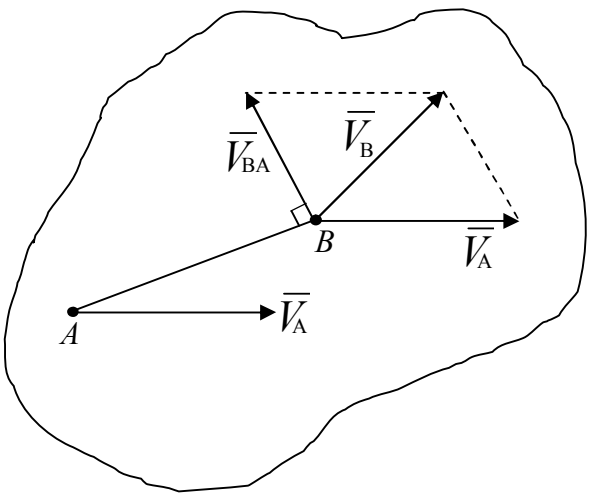


Рис. 2.44. Теорема сложения скоростей

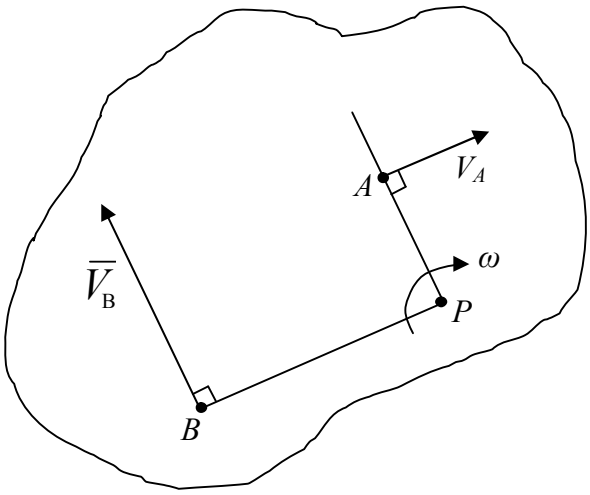


Рис. 2.45. Мгновенный центр скоростей

4. Построением плана скоростей. *План скоростей* – это графическое изображение векторов скоростей точек плоской фигуры в фиксированный момент времени. В данной работе не рассматривается.

Ускорение любой точки плоской фигуры ($\overline{a}_B$) равно векторной сумме ускорения поступательного движения полюса ($\overline{a}_A$) и линейного ускорения ($\overline{a}_{BA}$) точки от вращательного движения вокруг этого полюса:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}. \qquad (2.30)$$

Полное ускорение точки вращательного движении вокруг полюса раскладывается на касательное ($\overline{a}^{\tau}_{BA}$) и нормальное ($\overline{a}^{n}_{BA}$):

$$\overline{a}_{BA} = \overline{a}^{\tau}_{BA} + \overline{a}^{n}_{BA}. \qquad (2.31)$$

Данная теорема иллюстрируется рис. 2.46.

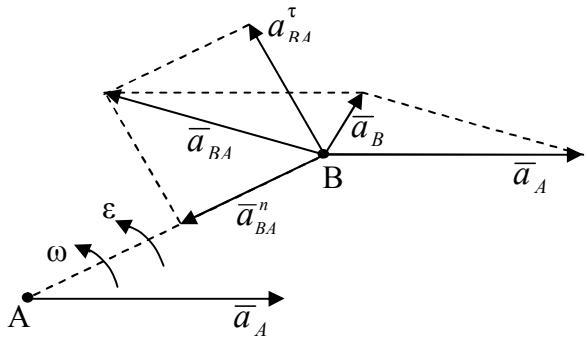


Рис. 2.46. Ускорение точки плоской фигуры

Вектор нормального ускорения $\overline{a}_{BA}^{n}$ направлен к полюсу А и равен по величине:

$$a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB \ . \qquad (2.32)$$

Вектор касательного (тангенциального) ускорения перпендикулярен AB и равен:

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB \, . \qquad (2.33)$$

Способы определения ускорения точек плоской фигуры, основанные на понятии мгновенного центра ускорений, мы рассматривать не будем.

При решении задач рекомендуется следующий порядок действий:

1. Механизм, движение которого изучается, нужно изобразить в том положении, для которого требуется определить кинематические характеристики.

2. Расчет начинают с того звена (тела), движение которого задано, и, переходя от одного звена к другому, определяют скорости и ускорения тех точек, которые являются общими для этих двух звеньев.

3. Мгновенный центр скоростей находится для каждого звена в отдельности; то же относится к угловым скоростям и ускорениям. Найденное значение скорости точки плоского тела действительно только для данного момента времени.

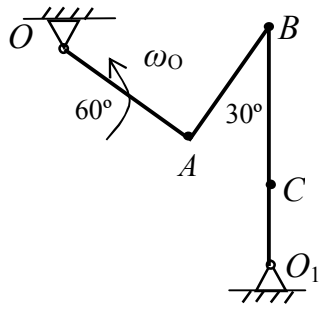


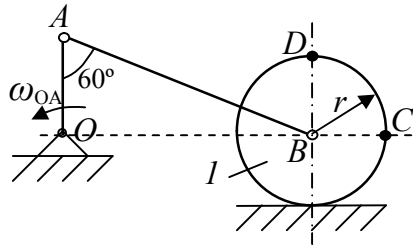
Рис. 2.47. Расчетная схема к задаче К 4.1

Задачи

Задача К 4.1

Дано: угловая скорость вращения кривошипа $\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$, размеры AB = 80 см, OA = 40 см, BO_1= 2BC= =200 см, угол OAB =90º.

Найти: ω_{AB}, V_{B}, V_C, ω_{BO1} (рис. 2.47).



Задача К 4.2.

Дано: угловые скорости вращения кривошипа $\omega_{OA} = 6\ c^{-1}$, размеры AB = 80 см, r =15 см, OA = 40 см.

Найти: V_B, ω_{AB}, ω_1, V_D, V_C (рис. 2.48).

Рис. 2.48. Расчетная схема к задаче К 4.2

Задача К 4.3

Дано: угловые скорости вращения кривошипа $\omega_{OA} = 5\,c^{-1}$ и колеса 1 $\omega_1 = 4\,c^{-1}$, размеры OA= 40 см, R = 25 см.

Найти: ω_2, V_B, V_C (рис. 2.49).

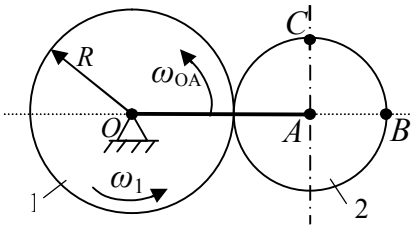


Рис. 2.49. Расчетная схема к задаче К 4.3

Задача К 4.4

Дано: угловая скорость вращения кривошипа $\omega_{OA} = 3\,c^{-1}$, размеры OA=40 см, BC= 40 см, r_2 =15 см, $\angle ABC = 90°$.
Найти: ω_{AB}, ω_{BC}, V_B, Vc (рис. 2.50).

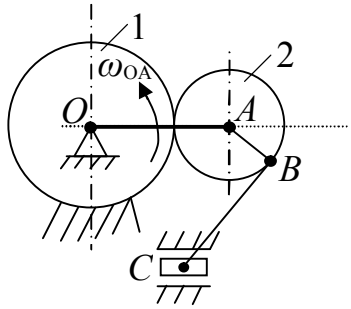


Рис. 2.50. Расчетная схема к задаче К 4.4

Задача К 4.5

Ползун B движется равномерно в прямолинейных направляющих DE со скоростью $\overline{V}$ и приводит в движение стержень AC и кривошип OA. Определить ускорение точек A и C в тот момент, когда $BO \perp DE$ и угол OAC =90^0. Длина кривошипа OA = R, (рис. 2.51) расстояние шарнира O до направляющих ползуна равно h, расстояние BC равно l.

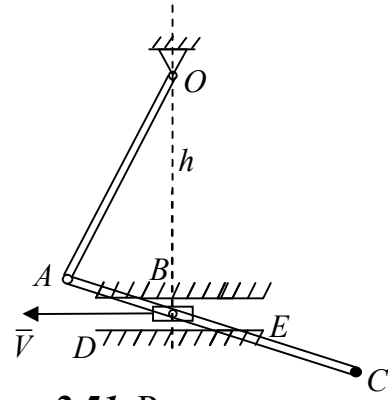


Рис. 2.51. Расчетная схема к задаче К 4.5

Задача К 4.6

Квадрат со стороной AB = 1 м движется в плоскости чертежа (рис. 2.52). В данный момент времени ускорение его вершины A равно a_A=$\sqrt{2}$ м/с^2, угловая скорость $\omega_{OA} = 1\,c^{-1}$, угловое ускорение ε = 0. Найти в этот момент времени ускорение вершины B квадрата.

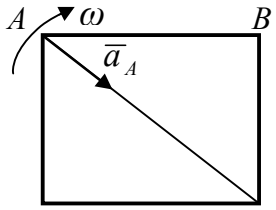


Рис. 2.52. Расчетная схема к задаче К 4.6

Задача К 4.7

Колесо радиуса R =1м катится без скольжения по прямолинейному рельсу, скорость его центра C постоянна и равна V_c = 2 м/с (рис. 2.53). Опреде-

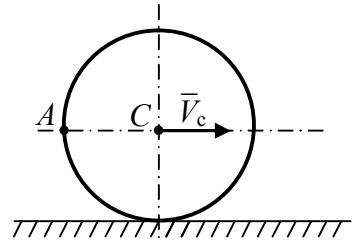


Рис. 2.53. Расчетная схема к задаче К 4.7

лить скорость точки *A,* ее полное, нормальное и касательное ускорения.

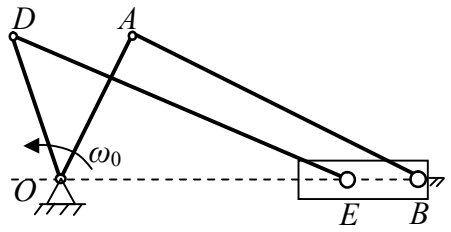


Рис. 2.54. Расчетная схема к задаче К 4.8

Задача К 4.8

Ползуны *B* и *E* сдвоенного кривошипно-шатунного механизма соединены стержнем *BE*. Ведущий кривошип *OA* и ведомый кривошип *OD* качаются вокруг общей неподвижной оси *O*, перпендикулярной к плоскости чертежа (рис. 2.54). Определить мгновенную угловую скорость ведомого кривошипа *OD* и шатуна *DE*, если ведущий кривошип OA имеет мгновенную скорость ω_o = 12 рад/с и перпендикулярен к направляющей ползунов. Даны размеры: *OA* = 0,1 м; *OD* = 0,12 м; *AB* = 0,26 м; *EB* = 0,12 м; *DE* = 0,12√3 м.

Задача К 4.5

В центральном кривошипно-шатунном механизме длина кривошипа *r* и длина шатуна *L* связаны соотношением $L = r\sqrt{3}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна в тот момент, когда он составляет с кривошипом прямой угол, если угловая скорость кривошипа постоянна и равна ω_o.

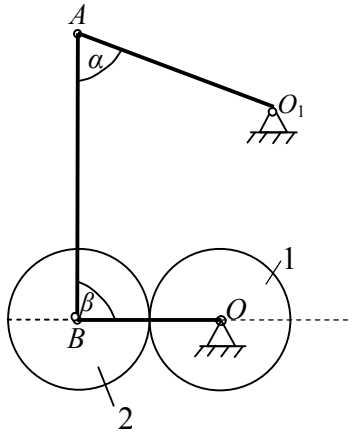


Рис. 2.55. Расчетная схема к задаче К 4.10

Задача К 4.10

Механизм Уатта состоит из коромысла O_1A, которое, качаясь на оси O_1, передает при помощи шатуна *AB* движение кривошипу *OB*, свободно насаженному на ось *O*. На той же оси сидит колесо 1. Шатун *AB* оканчивается колесом 2, жестко связанным с шатуном (рис. 2.55). Определить угловые скорости кривошипа *OB* и колеса 1 в момент, когда $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^0$, если $r_1 = r_2 = 0{,}3\sqrt{3}$ м, $O_1A = 0{,}75$ м, *AB*=1,5 м и угловая скорость коромысла $\omega_0 = 6$ рад/с.

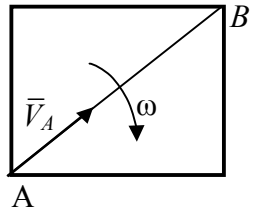


Рис. 2.56. Расчетная схема к задаче К 4.11

Задача К 4.11

Квадрат со стороной *d* совершает плоское движение (рис. 2.56). В данный момент известны его угловая скорость ω и скорость V_A точки *A*, направленная

по диагонали AB. Определить скорость точки B квадрата.

Задача К 4.12

Планетарный механизм состоит из кривошипа O_1A, приводящего в движение шатун AB, коромысло OB и шестеренку 1 радиуса r_1= 0,25м; шатун AB оканчивается шестеренкой 2 радиуса r_2= 0,1м, жестко с ним связанной (рис. 2.57). Определить угловую скорость кривошипа O_1A и колеса 1 в момент, когда $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 90^\circ$, если $O_1A = 0{,}3\sqrt{2}$ м, AB =1,5м, угловая скорость коромысла OB $\omega = 8$ рад/с.

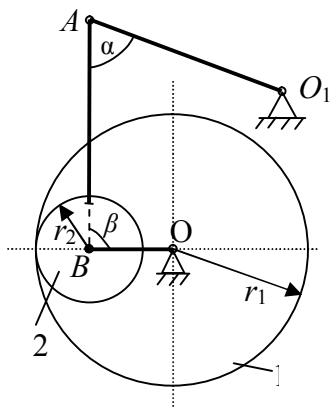


Рис. 2.57. Расчетная схема к задаче К 4.12

Задача К 4.13

Кривошип OA плоского механизма делает 60 об/мин. Определить скорость ползуна B в тот момент времени, когда кривошип образует с осью Ox угол φ = 60° (рис. 2.58), если $OA = AB$ = 0,2 м.

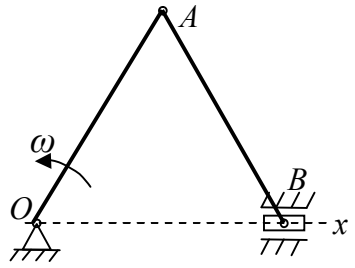


Рис. 2.58. Расчетная схема к задаче К 4.13

Задача К 4.14

Антипараллелограмм состоит из двух кривошипов AB и CD одинаковой длины 0,4 м и шарнирно соединенного с ними стержня BC длиной 0,2 м (рис. 2.59). Расстояние между неподвижными осями A и D равно 0,2 м. Кривошип AB вращается с постоянной угловой скоростью ω_0.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня BC в момент, когда $\angle ADC = 90°$.

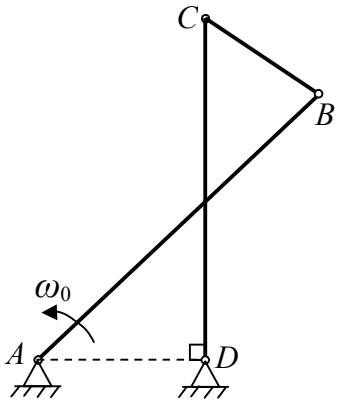


Рис. 2.59. Расчетная схема к задаче К 4.14

Задача К 4.15

Кривошипный механизм связан шарнирно в середине C шатуна со стержнем CD, а последний – со стержнем DE, который вращается вокруг оси E (рис. 2.60). Определить угловую скорость стержня DE в указанном на чертеже положении кривошипного механизма, если точки B и E расположены на одной вертикали; угловая скорость ω_{OA} кривошипа OA равна 8 рад/с, OA = 0,25 м, DE = 1 м, угол CDE = 90° и угол BED =30°.

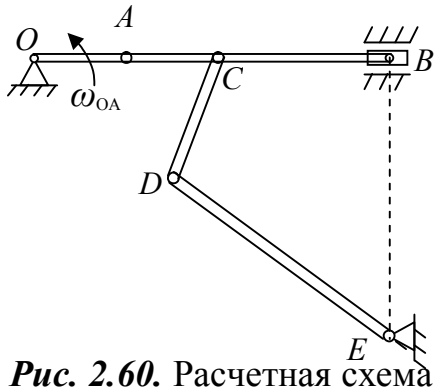


Рис. 2.60. Расчетная схема к задаче К 4.15

Задача К 4.16

Ускорения концов однородного стержня AB длиной 1,2 м, совершающего плоское движение, перпендикулярны к AB и направлены в одну сторону, причем ускорение точки A – $a_A = 24\ м/с^2$, а точки B – $a_B = 12\ м/с^2$. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня, а так же ускорение его центра тяжести.

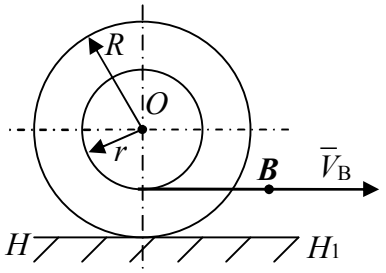


Рис. 2.61. Расчетная схема к задаче К 4.17

Задача К 4.17

Катушка радиуса R катится по горизонтальной плоскости HH_1 без скольжения. На средней цилиндрической части катушки радиуса r намотана нить, конец которой B обладает при этом движении скоростью V_B по горизонтальному направлению (рис. 2.61). Определить скорость V_o перемещения оси катушки.

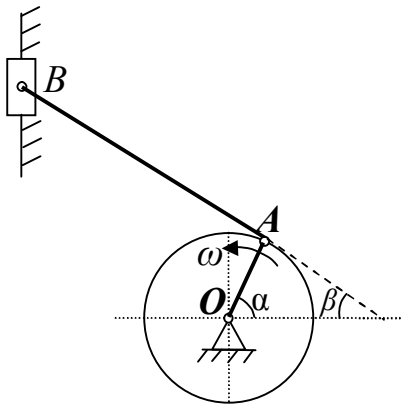


Рис. 2.62. Расчетная схема к задаче К 4.18

Задача К 4.18

Кривошип OA длиной 0,2 м вращается равномерно с угловой скоростью ω_o = 10 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 1 м. Ползун B движется по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а так же ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпенди-

кулярны и образуют с горизонтальной осью углы α = 45° и β = 45° (рис. 2.62).

Задача К 4.19

Шестеренка радиуса R =12 см приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг оси O неподвижной шестеренки с тем же радиусом (рис. 2.63). Кривошип вращается с угловым ускорением ε = 8 рад/с^2, имея в данный момент угловую скорость ω_{0A} = 2 рад/с. Определить скорость и ускорение точки B.

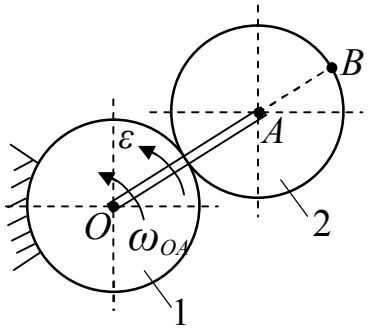


Рис. 2.63. Расчетная схема к задаче К 4.19

Задача К 4.20

Для заданного положения механизма, изображенного на рис. 2.64, при известной угловой скорости кривошипа ω_{OA}= 2рад/с, определить: угловую скорость звена AB; скорость точки B; угловую скорость звена BC; скорость точки C; нормальную составляющую ускорения точки C при вращении ее вокруг B, если OA = 0,25 м, AB = 0,3 м, BC = 0,2 м.

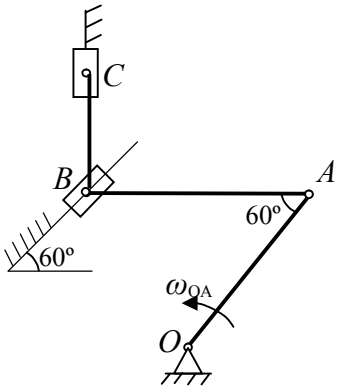


Рис. 2.64. Расчетная схема к задаче К 4.20

Задача К 4.21

Равносторонний треугольник ABC движется в плоскости чертежа (рис. 2.65). Ускорения вершин A и B в данный момент времени равны 16 см/с^2 и направлены по сторонам треугольника. Определить ускорение вершины C треугольника.

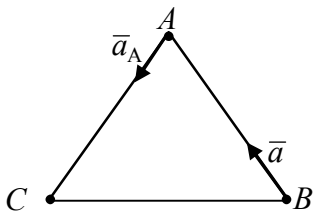


Рис. 2.65. Расчетная схема к задаче К 4.21

3. ДИНАМИКА

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек (тел и механических систем) в зависимости от сил, действующих на них.

На основе сведений из статики и кинематики, а также законов динамики решаются задачи о связи сил и движений.

Если движение точки задано уравнением в векторной форме ($\bar{r} = \bar{r}(t)$), то ускорение точки определяется как вторая производная по времени от радиус-вектора ($\bar{a} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$).

Тогда по второму закону Ньютона:

$$m\bar{a} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}. \qquad (3.1)$$

Если движение точки задано уравнениями в координатной форме: x = *x(t), y = y(t), z=z(t)*, то основное уравнение динамики записывается в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z,. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} = F_y, \\ m\ddot{z} = F_z. \end{cases} \qquad (3.2)$$

При естественном способе задания движения уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2S}{dt^2} = F_\tau, \\ m\dfrac{(dS/dt)^2}{\rho} = F_n, \\ 0 = F_b,. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m\dfrac{dV}{dt} = F_\tau, \\ m\dfrac{V^2}{\rho} = F_n, \\ 0 = F_b. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Уравнения (3.1), (3.2), (3.3) называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки в векторной форме и соответствующих проекциях.

3.1. Первая задача динамики точки

К первой (прямой) задаче динамики точки относятся задачи, в которых по заданной массе и закону движения точки требуется определить равнодействующую сил, приложенных к точке (в том числе и реакций связей, если точка не свободна). Решение этой задачи сводится к определению ускорения и, следовательно, к дифференцированию по времени заданных уравнений движения точки. При векторном способе задания движения используется уравнение (3.1). Если способ задания движения координатный, то предварительно находят проекции равнодействующей $\overline{F}$ всех сил, приложенных к точке, по формулам (3.2), а затем определяют величину и направление самой равнодействующей по формулам:

$$\begin{cases} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \\ \cos\alpha = F_x / F, \quad \cos\beta = F_y / F, \quad \cos\gamma = F_z / F. \end{cases} \tag{3.4}$$

При естественном способе задания движения точки используются формулы (3.3).

Решение первой задачи динамики точки можно осуществить, используя метод кинетостатики. Для этого вводят силу инерции ($\overline{\Phi}$), равную произведению массы точки на модуль ее ускорения и направленную в сторону, противоположную вектору ускорения. Силу инерции условно прикладывают к движущейся точке, после чего считают, что геометрическая сумма всех заданных сил, реакций связей и силы инерции равна нулю:

$$\overline{R} + \overline{N} + \overline{\Phi} = 0, \tag{3.5}$$

где $\overline{R}$ – равнодействующая всех заданных сил, приложенных к точке;

$\overline{N}$ – равнодействующая реакций связей, наложенных на точку.

Прямые задачи динамики несвободной материальной точки, в которых требуется определить активную силу или реакцию связи рекомендуется решать в следующем порядке:

- выбрать систему отсчета, если она не дана в условии задачи и изобразить точку в положении, соответствующем условию задачи;

- определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на оси координат;

- составить дифференциальные уравнения движения материальной точки с учетом активных сил и сил реакций связей;

- определить искомые величины из системы составленных уравнений.

Задачи

Задача Д 1.1

Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой $m = 1$ кг, движется вертикально вверх по закону $S = 0{,}5t^2$ (см). Найти силу давления груза на платформу.

Задача Д 1.2

Материальная точка массой $m = 1$ кг движется по плоскости *0xy*. Уравнение движения: $x = \cos 2\pi t$ (м), $y = \sin 2\pi t$ (м). Найти величину равнодействующей силы в момент времени $t_1 = 1/3$ с.

Задача Д 1.3

Материальная точка *M* массой 0,1 кг, подвешенная на нити длиной *OM*=*L*=0,2 м, закрепленной в неподвижной точке *O*, представляет собой конический маятник, причем нить составляет с вертикалью угол α = 60°. Определить скорость точки и натяжение нити (рис. 3.1).

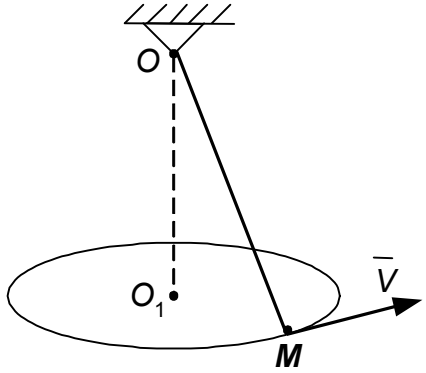


Рис. 3.1. Расчетная схема к задаче Д 1.3

Задача Д 1.4

Снаряд массой 6,3 кг вылетает из орудия со скоростью 680 м/с. Чему равна средняя сила давления пороховых газов, если снаряд внутри ствола движется равноускоренно в течение 0,008 с?

Задача Д 1.5

Автомобиль массой 3 т движется по вогнутому мосту со скоростью 36 км/ч, радиус кривизны в середине моста – 50 м. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

Задача Д 1.6

Груз массой 50 кг поднят канатом вертикально вверх за 2 с на высоту 10 м. Определить силу натяжения каната, считая движение груза равноускоренным.

Задача Д 1.7

Гиря массой 100 г вращается на нити в вертикальной плоскости, длина нити 40 см. Определить силу натяжения нити при прохождении гири через нижнюю точку, если скорость ее в этот момент V=5 м/с.

Задача Д 1.8

Материальная точка массой 2 кг совершает прямолинейное движение по закону: $x = 3\cos(\pi/3)t$ (м). Найти величину равнодействующей силы в момент, когда x = 1,5 м.

Задача Д 1.9

Тело массой 200 кг, двигаясь равноускоренно по горизонтальной плоскости, прошло 30 м за время t_1= 4 с от начала движения, коэффициент трения f = 0,1. Определить горизонтальную составляющую силы, действующей на тело.

Задача Д 1.10

Шарик массой 0,2 кг, подвешенный на нити длиной 0,3 м, движется по окружности равномерно в горизонтальной плоскости. Определить силу натяжения нити и скорость шарика.

Задача Д 1.11

Материальная точка массой 1 кг движется согласно закону $\bar{r} = \bar{i}e^{2t} + \bar{j}\cos^2 t - \bar{k}t^2$ (м), где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$. Найти модуль действующей на точку силы в начальный момент времени t=0.

Задача Д 1.12

Материальная точка массой m =1кг движется относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$ под действием двух постоянных сил: $\bar{F}_1 = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{F}_2 = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$. Определить ускорение точки.

Задача Д 1.13

Материальная точка массой 1 кг движется относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$ под действием трех постоянных сил: $\bar{F}_1 = \bar{j} + \bar{j} + \bar{k}$; $\bar{F}_2 = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{F}_3 = 3\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$. Какой угол α составляет вектор ускорения точки с координатной осью Oy?

Задача Д 1.14

Ползун 1 массой 20 кг, на который действует кривошип 2 с постоянной силой 150 *Н*, движется в направляющих 4, изображенных на рис. 3.2. Определить ускорение ползуна, если со стороны направляющих действует сила трения равная 40 *Н*, а со стороны тяги 3 – сила сопротивления 100 *Н*, угол α= 60°.

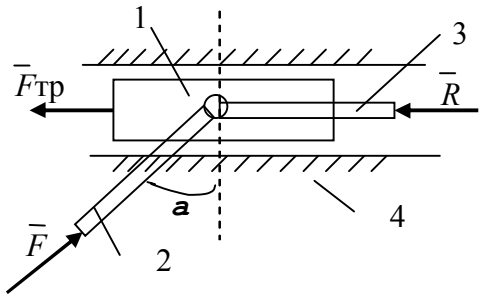


Рис. 3.2. Расчетная схема к задаче Д 1.14

Задача Д 1.15

Перед посадкой истребителя отключаются маршевые двигатели и включаются тормозные, развивающие общую тормозную силу в 4,5 раза превышающую собственную силу тяжести истребителя. Реактивная струя от тормозных двигателей направлена под углом α =40° к вертикали. Определить вертикальную и горизонтальную составляющие реакции кресла пилота, если масса последнего 80 кг.

Задача Д 1.16

Уравнения движения материальной точки имеют вид: $x = 2\sin(4t - \pi/2)$ (м), $y = 2\sin(2t - \pi/2)$ (м). Как направлен вектор нормальной составляющей, действующей на точку силы, в момент времени $t = \pi/4$ с.

Задача Д 1.17

Два соприкасающихся бруска массой $m_1 = 6$ кг, $m_2 = 4$ кг, лежащие на шероховатой плоскости, приводятся в движение горизонтальной силой равной 25 *Н* (рис. 3.3). Определить ускорение брусков, если коэффициент трения скольжения в месте контакта брусков с опорной плоскостью равен 0,2. Найти усилие взаимодействия брусков.

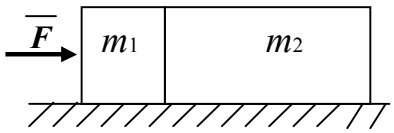


Рис. 3.3. Расчетная схема к задаче Д.1.17

Задача Д 1.18

Груз весом *P*, подвешенный на невесомом нерастяжимом тросе, поднимается с помощью зубчатой передачи (рис. 3.4). Пренебрегая

массой элементов передачи и сопротивлениями, определить силу натяжения троса, если угловая скорость ведущего колеса передачи, имеющего радиус R_1, изменяется по закону $\omega_1 = kt$, где $k = \text{const}$.

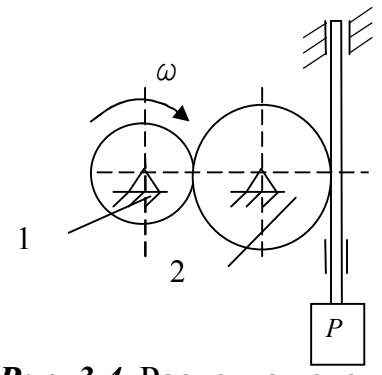


Рис. 3.4. Расчетная схема к задаче Д.1.18

3.2. Вторая задача динамики точки

Во второй (основной) задаче динамики требуется определить уравнение движения точки по известной массе, приложенным силам и начальным условиям. Силы, действующие на точку, могут быть как постоянными, так и заданными функциями времени, координат и скорости точки, т.е.:

$$F_x = f_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$F_y = f_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$F_z = f_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Решение основной задачи динамики сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (3.1), (3.2), (3.3).

При решении задач полезно придерживаться следующей последовательности:

1. Составить дифференциальные уравнения движения. Для этого нужно:

а) выбрать координатные оси, поместив их начало (в большинстве случаев) в начальное положение точки; если движение точки является прямолинейным, то одну из координатных осей следует проводить вдоль линии движения точки;

б) изобразить движущуюся точку в произвольный текущий момент t и показать на рисунке все действующие на нее силы, в том числе реакции связей;

в) найти суммы проекций всех сил на выбранные оси и подставить эту сумму в правые части уравнений (3.2) и (3.3).

2. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения.

3. Поставить начальные условия и по ним определить постоянные интегрирования.

4. Из найденных в результате интегрирования уравнений, определить искомые величины.

Задачи

Задача Д 2.1

Материальная точка массой m = 2 кг движется под действием силы, проекция которой на оси координат: $F_x = 0$, $F_y = -20$ Н. Найдите уравнение движения точки, если начальные условия заданы: $x_{0;} = 0; y_0 = 0;$ $V_{0x} = 350$ м/с, $V_{0y} = 500$ м/с.

Задача Д 2.2

Тело массой m опускается по гладкой поверхности, наклоненной под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. За какое время тело пройдет путь 10 м, если начальная скорость $V_0 = 1$ м/с?

Задача Д 2.3

Материальная точка поднимается по шероховатой плоскости, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом, имея начальную скорость $V_0 = 40$ м/с. Коэффициент трения f = 0,1. Какой путь пройдет точка за время $t_1 = 2$ с?

Задача Д 2.4

Тело массой 2 кг, находящееся на горизонтальной плоскости, приводится из состояния покоя постоянной силой 10 Н. Какой путь пройдет тело за время t_1=3 с, если коэффициент трения f = 0,1?

Задача Д 2.5

Тело массой 2 кг движется прямолинейно под действием силы $F_x = 10 + 5t$ (Н). Найти уравнение движения тела, если $x_0 = 0$ м, $V_0 = 0{,}5$ м/с. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 3$ с?

Задача Д 2.6

Точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Составить уравнение движения точки, если $x_0 = 0; y_0 = 0;$ $V_{0x} = V_0 \cos\lambda$, $V_{0y} = V_0 \sin\lambda$, где λ – угол между вектором скорости и горизонталью при t = 0.

Задача Д 2.7

За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен трамвай, идущий по горизонтальному пути со скоростью 36 км/ч, если коэффициент трения f = 0,3?

Задача Д 2.8

Тело опускается по наклонной плоскости, составляющей угол λ = 30° с горизонтом, в течении 2 с. Его начальная скорость $V_0 = 0$. Коэффициент трения f = 0,2. Какой путь прошло тело за это время?

Задача Д 2.9

Материальная точка массой 2 кг движется из начала координат вдоль горизонтальной оси *Ox*, имея начальную скорость $V_0 = 1{,}5$ м/с и испытывая силу сопротивления движению $\overline{R} = -k \cdot x \cdot \overline{i}$ (Н), где k=6 Н·с/м – положительная константа. Найти закон движения точки.

Задача Д 2.10

Свободная материальная точка движется из начала координат *O* под действием силы тяжести с начальной скоростью $\overline{V_0} = V_0 \cdot \overline{i}$. Установить вид траектории.

Задача Д 2.11

Два груза одновременно начинают движение из состояния покоя с высоты h над горизонтальной поверхностью пола, причем первый груз соскальзывает без трения по плоскости, составляющий угол λ=30° с горизонтом, а второй свободно падает. Определить соотношение скоростей этих грузов при достижении ими поверхности пола.

Задача Д 2.12

Шарик весом 98 мН движется в горизонтальной плоскости под действием силы $\overline{F} = 2\overline{n}$ (мН), где $\overline{n}$ – орт главной нормали траектории. Определить форму траектории шарика и путь, пройденный им за первые две секунды с начала движения. Начальная дуговая координата шарика $S = -0{,}5$ м, начальная скорость $V_0 = 0{,}2$ м /с.

Задача Д 2.13

Точка массой 1 кг движется без начальной скорости под действием силы: $\overline{F} = 2 \cdot \overline{\tau} + 5t^2 \cdot \overline{n}$ (Н), где $\overline{\tau}$, $\overline{n}$ – орты касательной и главной нормали траектории. Установить форму траектории и закон движения точки по траектории, если отсчет дуговой координаты *S* точки производится от начального ее положения.

Задача Д 2.14

Истребитель массой 2,5 т садится на палубу авианосца со скоростью 540 км/ч. Для сокращения пробега в момент касания колесами палубы истребитель цепляется за натянутый резиновый трос, который создает тормозную силу, меняющуюся по закону $F_{тр} = kS$, где k =1,6 кН/м; S – пройденный тормозной путь, м. Определить общий пробег истребителя по палубе.

Задача Д 2.15

Модель реактивного самолета массой 85 кг развивает силу тяги равную 9,8 кН и имеет начальную скорость 150 м/с. Предельная скорость при

данной тяге равна 250 м/с. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости в первой степени $\overline{R} = -k\overline{V}$, $k = 1$ кН·с/м. Найти время, по истечению которого скорость модели будет отличаться от предельной на 5 м/с.

Задача Д 2.16

Парашютист опускается без начальной скорости. Масса парашютиста равна 90 кг, площадь проекции раскрытого парашюта на плоскость, перпендикулярную направлению движения, $S = 64\ м^2$. Определить максимальную скорость парашютиста, если сила сопротивления $F_{сопр} = 0{,}45\rho \cdot S \cdot V^2$, где ρ – плотность воздуха, $\rho = 1{,}226\ кг/м^3$.

Задача Д 2.17

Груз, сброшенный с пикирующего самолета на высоте h, имеет начальную скорость $\overline{V}_0$, направленную под углом λ к вертикали. На каком расстоянии (по горизонтали) от точки сбрасывания груз упадет на землю, если пренебречь сопротивлением воздуха?

Задача Д 2.18

Материальная точка массой m =1кг под действием силы $F = \overline{i} \cdot e^t$ (Н) движется вдоль оси Ox. Определить уравнение движения точки, если в начальный момент она имела нулевую скорость и находилась в начале координат.

Задача Д 2.19

Метеорит, упавший на Землю в 1751 г., весил 39 кг. Падая, он углубился в почву на глубину L= 1,875 м. Опытное исследование показало, что почва в месте падения метеорита оказывает проникающему в нее телу сопротивление F =50 т. Определить скорость метеорита в момент достижения им поверхности Земли. С какой высоты он должен был упасть без начальной скорости, чтобы у поверхности Земли приобрести указанную скорость? Считаем силу тяжести постоянной и пренебрегаем сопротивлением воздуха.

Задача Д 2.20

Перед станцией поезд идет со скоростью 36 км/ч под уклон, угол которого λ =0,08 рад. В некоторый момент машинист, увидев опасность, начинает тормозить поезд. Сопротивление от торможения и трения в осях составляет 0,1 веса поезда. Определить тормозной путь и время торможения, полагая $\sin\lambda = \lambda$.

3.3. Колебания материальной точки

Колебания – движение материальной точки по гармоническому закону. Теория колебаний является одним из важнейших разделов

теоретической механики. Ее роль в современной технике все время возрастает. При проектировании двигателей, машин и механизмов, мостов и других сооружений всегда производятся расчеты на колебания.

Пусть на точку действует упругая сила, стремящаяся вернуть её в положение равновесия, пропорциональная по величине отклонению точки от этого положения. Если движение точки происходит вдоль оси Ox, O – положение равновесия, то $F_x = -cx$, где с – коэффициент упругости (жесткости). Дифференциальное уравнение движения точки в этом случае получается линейным:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{3.6}$$

где $k = \sqrt{c/m}$ – частота собственных колебаний, Гц.

Общим решением этого уравнения будет:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A \sin(kt + \lambda), \tag{3.7}$$

где C_1, C_2; A, λ – произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям движения; A – амплитуда колебания; λ – начальная фаза.

Период колебания определяется формулой:

$$T = 2\pi / k = 2\pi\sqrt{m/c}. \tag{3.8}$$

Колебания в этом случае являются незатухающими.

Если, кроме упругой силы, на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная первой степени скорости и направленная противоположно скорости, т.е. $R_x = -bV_x$, то дифференциальное уравнение движения точки имеет вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{3.9}$$

где $n = b/2m$.

При решении этого дифференциального уравнения возможны три случая.

Случай 1: $n < k$ («малое» сопротивление среды).

Общее решение дифференциального уравнения (3.9) имеет вид:

$$x = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \lambda), \tag{3.10}$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, (3.11)

A, λ – постоянные, определяемые начальными условиями.

Движение точки в этом случае носит характер затухающего колебания с условным периодом (промежуток времени одного полного колебания):

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \qquad (3.12)$$

Величина e^{-nT} характеризует соотношение двух последовательных экстремальных отклонений и называется декрементом затухания.

Случай 2: $n > k$ ("большое" сопротивление среды). Общее решение дифференциального уравнения (3.9) записывается в виде:

$$x = C_1 e^{-t(n+k_2)} + C_2 e^{-t(n-k_2)}, \qquad (3.13)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные,

$k_2 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

В этом случае точка совершает апериодическое затухающее движение.

Случай 3: $n = k$ («предельный» случай). Общее решение уравнения (3.9) примет вид:

$$x = \left(C_1 t + C_2\right) \cdot e^{-nt}, \qquad (3.14)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

В данном случае имеет место также апериодическое затухающее движение.

Если, кроме упругой силы и силы сопротивления среды, на точку действует внешняя сила, зависящая от времени:

$$Q_x = H \sin pt,$$

где H – амплитуда силы (ее наибольшее значение);

p – круговая частота силы,

то дифференциальным уравнением движения точки будет:

$$\ddot{x} + k^2 x + 2n\dot{x} = h \sin pt, \qquad (3.15)$$

где $h = H / m; n = b / 2m;$

$k^2 = c / m.$

Общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения;

x_2 – любое частное решение уравнения (3.15), которое можно искать в виде:

$$x_2 = A_1 \sin(pt + \beta), \qquad (3.16)$$

где $A_1 = h/\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}$,

$\mathrm{tg}\beta = (2pn)/(k^2 - p^2)$.

Частное решение x_2 называют вынужденным колебанием.

Если $n \neq 0$ (т.е. имеет место сопротивление среды), то

$$\lim_{t\to\infty} x_1 \to 0,$$

и поэтому интерес представляют только вынужденные колебания $x_2(t)$.

Если $n = 0$, то:

$$A_1 = \frac{h}{k^2 - p^2},$$

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt, \qquad (3.17)$$

$$x = A\sin(kt + \lambda) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt. \qquad (3.18)$$

Если $p = k$, то наступает явление *резонанса*. В этом случае при отсутствии сопротивления:

$$x_2 = -\frac{ht}{2k}\cos kt, \qquad (3.19)$$

т.е. происходит нарастание амплитуды по линейному закону.

При наличии сопротивления при условии резонанса уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$x_2 = -\frac{ht}{2pn}\cos kt. \qquad (3.20)$$

При фиксированных h и n максимум амплитуды вынужденных колебаний имеет место при $p_1 = k\sqrt{1 - 2n^2/k^2}$. Если $(n / k) \ll 1$, то при $p = k$ амплитуда близка к максимальной.

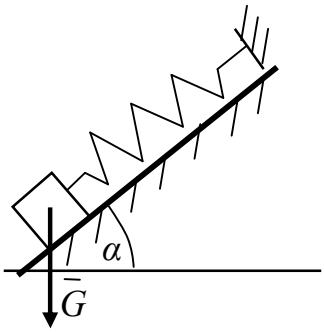
Задачи

Задача Д 3.1

Груз весом G =1 Н подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно. Жесткость

пружины c=10 Н/см, а длина ее в недеформированном состоянии L=30 см. Найти закон движения груза, если в начальный момент длина пружины равна $l_o = 45$ см, а грузу сообщена начальная скорость $V_0 = 20$ см/с, направленная вниз.

Задача Д 3.2



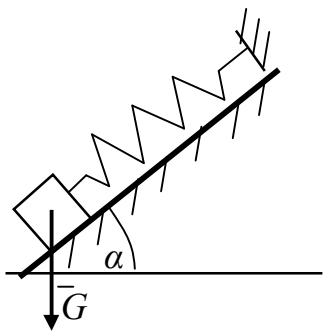
Тело весом G =1Н находится на плоскости, наклоненной под углом α=30° к горизонту (рис. 3.5). Тело прикреплено к пружине, жесткость которой c = 0,1 Н/см. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость V_0=10 см/с, направленная вниз по наклонной плоскости.

Рис. 3.5. Расчетная схема к задаче Д 3.2

Задача Д 3.3

Пластина весом G =1,96 Н, подвешенная к пружине, верхний конец которой закреплен неподвижно, движется между полюсами постоянного магнита. Вследствие вихревых токов движение пластины тормозится силой $F = 10^{-6}\mu\Phi^2 V$ (Н), где $\mu = 2$, Φ=1000 ед., Φ – магнитный поток и V – скорость пластины, м/с. Пластине сообщена начальная скорость V_0= 0,08 м/с, направленная вверх, а пружине, имеющей коэффициент жесткости c=51,2 Н/м, начальное удлинение λ_0=0,02 м. Определить уравнение движения пластины.

Задача Д 3.4



Груз весом G прикреплен к нижнему концу пружины, расположенной на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α=30°, верхний конец которой закреплен неподвижно (рис. 3.6). Статическое удлинение пружины $\lambda_{ст}$=10 см. В начальный момент пружина растянута на λ_0= 5 см от положения статического равновесия. Грузу сообщена начальная скорость V = 21 см/с. Определить закон движения груза.

Рис. 3.6. Расчетная схема

к задаче Д 3.4

Задача Д 3.5

Груз весом G =100 Н подвешен к нижнему концу вертикальной пружины, верхний конец которой закреплен неподвижно. В начальный момент пружина растянута на λ_0 = 5 см от положения статического равновесия и грузу сообщают начальную скорость V_0= 0,2 см/с, направленную по вертикали вниз. Коэффициент жесткости пружины c=5 Н/см. Найти уравнение движения груза.

Задача Д 3.6

На пружине, один конец которой закреплён неподвижно, подвешен магнитный стержень весом G =1,96 Н, проходящий через соленоид. По соленоиду течёт переменный ток, действующий на стержень с силой $F = A \sin pt$, причём p=15 с$^{-1}$; A= 8 Н. Коэффициент жёсткости пружины c = 125 Н/м. Ток идёт с момента времени t_1=0; втягивая стержень в соленоид, до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Определить вынужденные колебания магнитного стержня.

Задача Д 3.7

На пружине, верхний конец которой закреплён неподвижно, подвешена тонкая пластинка весом G =1,47 Н, помещённая в сосуд с жидкостью. Сила сопротивления движению пластинки в жидкости $F=2Sf\cdot V$, где V – скорость пластинки, м/с, S = 0,05 м^2 – площадь пластинки и f =150 Н·с/м^3. Коэффициент жёсткости пружины c=135 Н/м. В начальный момент пружина находилась в положении статического равновесия, а пластинке сообщена начальная скорость V_0=3 м/с, направленная по вертикали вниз. Найти закон движения пластинки.

Задача Д 3.8

Груз массой m =1 кг подвешен на трёх пружинах (рис. 3.7) с коэффициентами жёсткости c_1= 2 Н/м, $c_2 = c_3$ = 7 Н/м. Найти частоту и период свободных вертикальных колебаний.

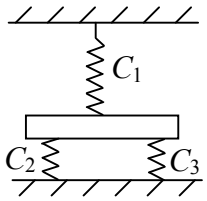


Рис. 3.7. Расчетная схема к задаче Д 3.8

Задача Д 3.9

Период вертикальных колебаний груза веса G = 9,8 Н, подвешенного на пружине, равен π/25 (с). Найти жёсткость этой пружины.

Задача 3.10

Материальная точка массы m =1кг, подвешенная на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания, описывающиеся уравнением z =2sin(kt+1) (см). Зная максимальную скорость точки V_{max}= 4 см/с, определить жёсткость пружины.

Задача Д 3.11

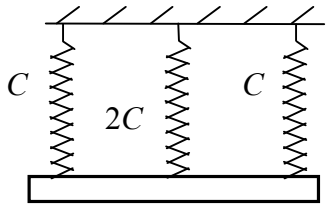


Рис. 3.8. Расчетная схема к задаче Д 3.11

Однородный горизонтальный брус, подвешенный на трёх равноудалённых пружинах (рис. 3.8), совершает свободные вертикальные колебания с периодом τ. Определить массу m бруса, если жёсткость средней пружины в два раза больше жёсткости каждой из крайних пружин.

Задача Д 3.12

На материальную точку массой m = 2 кг действуют вдоль одной прямой три силы: упругая сила с коэффициентом упругости c = 5000 Н/м, сила сопротивления R =-160·V и возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону $F = 300 \cdot \sin kt$. Найти отношение амплитуды вынужденных колебаний точки, имеющей место, когда частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных незатухающих колебаний, к максимальной амплитуде вынужденных колебаний.

Задача Д 3.13

Материальная точка совершает движение вдоль оси Ox. На точку, кроме упругой силы пружины, действует ещё сила сопротивления R =-0,2V и возмущающая сила Q, направленная вдоль оси Ox, проекция которой на эту ось равна 4(sinpt). Изменяя частоту p возмущающей силы, добиваются появления резонанса при p =2πn (c^{-1}). Определить амплитуду вынужденных колебаний при резонансе.

Задача Д 3.14

Дифференциальное уравнение колебаний материальной точки вдоль горизонтальной оси Ox имеет вид $\ddot{x} + 4x = 10$. Определить координату $x_в$ центра колебаний B этой точки.

Задача Д 3.15

По горизонтальной хорде вертикального круга движется точка массой 4 кг под действием силы притяжения, пропорциональной расстоянию от точки до центра, причём коэффициент пропорциональности равен 196 Н/м. Определить закон движения точки, если в начальный момент она находилась в крайнем положении и была отпущена без начальной скорости. Расстояние до хорды равно 0,3 м, а радиус окружности 0,5 м. Сила направлена к центру круга.

Задача Д 3.16

К пружине, коэффициент жёсткости которой c = 20 Н/см, подвешены два груза весом P_1= 0,5 Н и P_2= 0,8 Н. Система находилась в покое в положении статического равновесия, когда груз P_2 убрали (рис. 3.9). Найти уравнение движения, частоту, круговую частоту и период колебаний оставшегося груза.

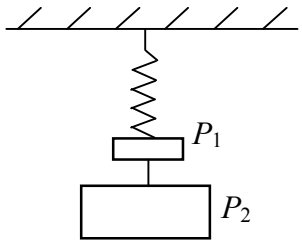


Рис. 3.9. Расчетная схема к задаче Д 3.16

Задача Д 3.17

Найти уравнение прямолинейного движения точки массы m, находящейся под действием восстанавливающей силы $Q = -cx$ и постоянной силы F_0. В начальный момент t = 0, x_0= 0, V_{ox}= 0. Найти также период колебаний.

Задача Д 3.18

На каждую рессору вагона приходится нагрузка P (Н); под этой нагрузкой рессора при равновесии прогибается на 5 см. Определить период T собственных колебаний вагона на рессорах. Упругое сопротивление рессоры пропорционально стреле её прогиба.

Задача Д 3.19

При равномерном спуске груза весом G =2 т со скоростью V=5 м/с произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором спускался груз, благодаря защемлению троса в обойме блока. Пренебрегая весом троса, определить его наибольшее натяжение при последую-

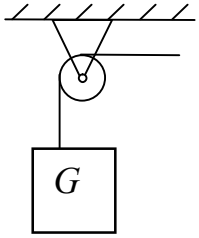


Рис. 3.10.Расчетная схема к задаче Д 3.19

щих колебаниях груза (рис. 3.10), если коэффициент жёсткости троса $c = 4$ т/см.

Общие теоремы динамики

Для решения многих задач динамики вместо метода интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более удобным пользоваться общими теоремами динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел и открывает тем самым новые возможности исследования механических движений, широко применяемые в инженерной практике. Кроме того, общие теоремы позволяют изучать отдельные, практически важные стороны данного явления, не изучая явление в целом. Наконец, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем, тем самым упрощает процесс решения.

3.4. Теорема о движении центра масс и об изменении количества движения

Центром масс системы материальных точек называют геометрическую точку, положение которой определяется радиусом-вектором:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{m}, \qquad (3.21)$$

или координатами:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \qquad (3.22)$$

где m – масса системы.

Дифференциальное уравнение движения центра масс имеет вид:

$$m \cdot \bar{a}_c = \bar{R}^E, \qquad (3.23)$$

или в координатной форме:

$$m \cdot a_{xc} = R_x^E; \qquad m \cdot a_{yc} = R_y^E; \qquad m \cdot a_{zc} = R_z^E, \qquad (3.24)$$

где R^E – главный вектор внешних сил.

Таким образом, центр масс любой системы движется так, как двигалась бы материальная точка, имеющая массу, равную массе всей системы, если бы на неё действовала сила, равная главному вектору всех внешних сил, приложенных к данной системе.

Если $R^E = 0$, то $V_c = \text{const}$.

Количеством движения точки называют вектор, равный $m \cdot \vec{V}$, а количеством движения системы – геометрическую сумму количеств движения всех точек системы:

$$\overline{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overline{V}_i = m \cdot \overline{V}_c \quad . \tag{3.25}$$

Производная от количества движения системы равна вектору всех внешних сил, действующих на систему, т.е.:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^E \quad . \tag{3.26}$$

Изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно импульсу главного вектора всех внешних сил, действующих на систему, за этот же промежуток времени, т.е.:

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \int_0^t \overline{R}^E / dt \, . \tag{3.27}$$

Задачи

Задача Д 4.1

Ведомое колесо автомашины катится со скольжением по горизонтальному шоссе под действием силы F, изображенной на рис. 3.11. Найти закон движения центра масс C колеса, если коэффициент трения скольжения равен f, а $F = 5f \cdot P$, где P – вес колеса. В начальный момент колесо находилось в покое.

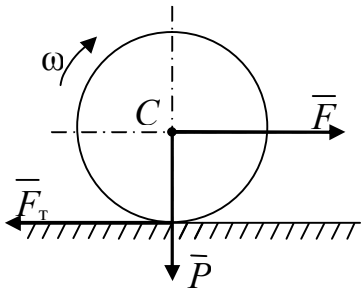


Рис. 3.11. Расчетная схема к задаче Д 4.1

Задача Д 4.2

Определить главный вектор внешних сил, действующих на колесо весом P, (рис. 3.12) скатывающееся с наклонной плоскости вниз, если его центр масс ***C*** движется по закону: $X_c = at^2$ (м.)

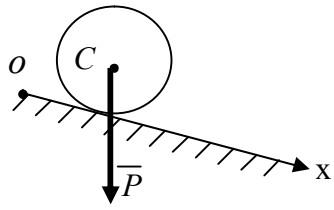


Рис. 3.12. Расчетная схема

Задача Д 4.3

Электрический мотор весом P установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте. На валу мотора под прямым углом закреплен одним концом однородный стержень длиной $2l$ и весом P_2, на другой конец стержня насажен точечный груз Q (рис. 3.13); угловая скорость вала равна ω. Определить: 1) горизонтальное движение мотора; 2) наибольшее горизонтальное усилие R, действующее на болты, если ими будет закреплен корпус электромотора на фундаменте.

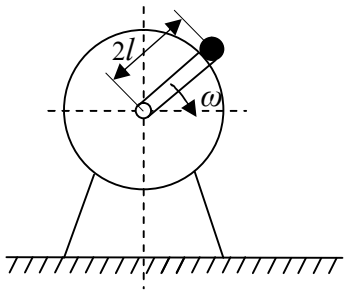


Рис. 3.13. Расчетная схема к задаче Д 4.3

Задача Д 4.4

Однородная шестерня I радиусом r катится по неподвижной шестерне II с таким же радиусом при помощи кривошипа OA, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω (рис. 3.14). Определить количество движения системы, если масса тела I равна m_1, а кривошип есть однородный стержень массой m_2.

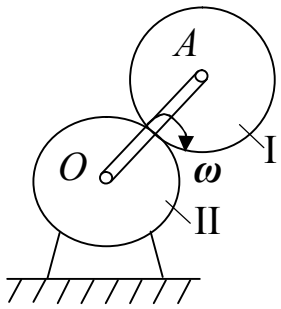


Рис. 3.14. Расчетная схема к задаче Д 4.4

Задача Д 4.5

Механическая система состоит из двух призм масс $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 4$ кг, опирающихся на гладкие взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 3.15). Считая известными угол α = 45° и ускорение a =21 см/с^2 нижней призмы, движущейся по горизонтали, найти ускорение центра масс системы.

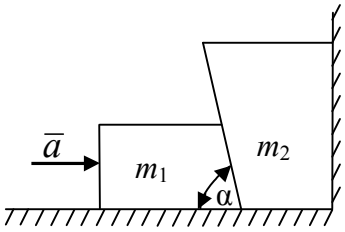


Рис. 3.15. Расчетная схема к задаче Д 4.5

Задача Д 4.6

На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидели два человека. Один из них весом P_1= 500 Н переместился вправо на нос лодки. В каком направлении и на какое расстояние должен переместиться второй человек весом P_2=700 Н для того, чтобы лодка осталась в покое? Длина лодки 4 м. Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

Задача Д 4.7

Буксирный пароход весом $P = 6 \cdot 10^6 H$ приобрел скорость V=1,5м/с, после чего натянулся буксирный канат, и баржа весом $P = 4 \cdot 10^6$ Н тронулась вслед за пароходом. Найти общую скорость парохода и баржи, считая, что движущая сила и сила сопротивления воды уравновешивается.

Задача Д 4.8

В вагонетку весом P_1=13 кН, движущуюся по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью V_1= 2 м/с, попадает груз весом P_2=1 кН со скоростью V_2= 20 м/с, образующей с вертикалью угол λ=30°. Пренебрегая трением, найти скорость вагонетки после попадания в нее груза.

Задача Д 4.9

Груз А весом P_1= 98 Н подвешен к концу каната, намотанного на шкив B весом P_2=196 Н (рис. 3.16), при этом груз A под действием собственного веса перемещается по вертикали вниз по закону: $x = gt^2/3$ (м), g = 9,8 м/с^2. Определить вертикальную реакцию в точке O.

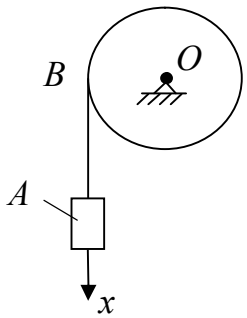


Рис. 3.16. Расчетная схема к задаче Д 4.9

Задача Д 4.10

Однородный круглый цилиндр весом P = 300 Н обмотан канатом, верхний конец которого закреплен неподвижно. Под действием собственного веса центр тяжести этого цилиндра перемещается верти-

кально вниз по закону: $y_c = t^3/3 + 2R$ (м), где R =const, g = 9,8 $м/с^2$. Определить натяжение каната.

Задача Д 4.11

Груз M весом P =10 кН, лежащий на краю железнодорожной платформы, передвигается лебедкой A, расположенной на другом конце платформы (рис. 3.17). Радиус барабана лебедки r =0,2 м, его угловое ускорение $\varepsilon_1 = 2\ c^{-1}$, начальная угловая скорость равна нулю. Вес платформы вместе с лебедкой Q =250 кН. Определить величину перемещения платформы через t=2 с после начала передвижения груза.

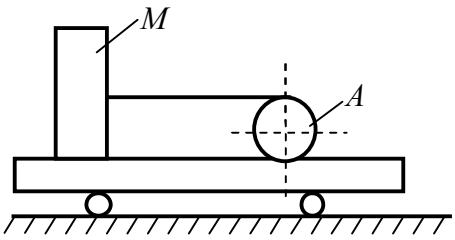


Рис. 3.17. Расчетная схема к задаче Д 4.11

Задача Д 4.12

Определить главный вектор количества движения маятника, состоящего из однородного стержня OA весом P = 10 Н, длиной l = 5r и однородного диска B (рис. 3.18) весом Q = 50 Н, радиуса r, если угловая скорость в данный момент времени равна ω = 3 c^{-1}, r = 3 м.

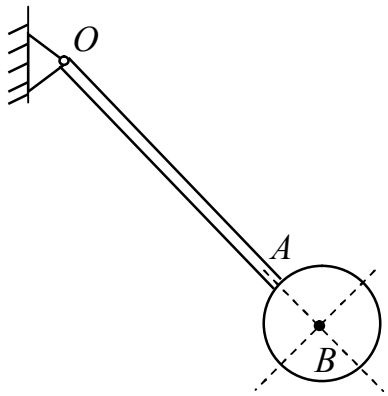
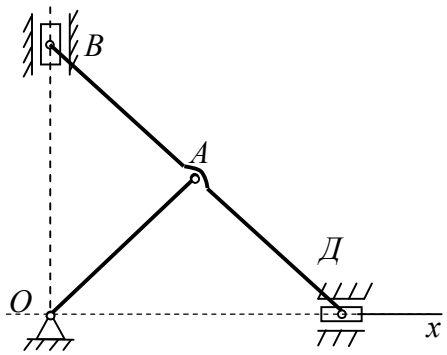


Рис. 3.18. Расчетная схема к задаче Д 4.12

Задача Д 4.13

Железнодорожный состав массой 1000 т с тепловозом массой 100 т передвигается по горизонтальному пути со скоростью 36 км/ч. После разрыва сцепки между тепловозом и составом вагон прокатился 95 м за 10 с. Считая, что ни сила тяги, ни сила трения при разрыве не изменились, найти, на каком расстоянии от вагонов находится в тот же момент тепловоз.



Задача Д 4.14

В механизме эллипсографа масса вращающегося кривошипа OA равна $2m$, масса каждого из ползунов B, $Д$ – m. Найти траекторию центра масс меха-

низма, если $OA=l$, а длина невесомой линейки $ВД$ (рис. 3.19) равна $2l$, причем $ВА=АД$.

Рис. 3.19. Расчетная схема к задаче Д 4.14

Задача Д 4.15

Два груза одинаковой массы m закреплены по концам нерастяжимого каната, переброшенного через однородный шкив массы m и радиуса r (рис. 3.20). Зная угловую скорость вращения шкива ω и пренебрегая проскальзыванием каната относительно шкива, определить количество движения системы.

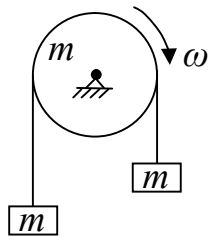


Рис. 3.20. Расчетная схема к задаче Д 4.15

Задача Д 4.16

Тело движется поступательно по шероховатой горизонтальной плоскости, начальная скорость $V_0 = 24{,}5$ м/с. Через 5 с после начала движения скорость тела уменьшилась вдвое. Определить коэффициент трения скольжения по плоскости.

Задача Д 4.17

Снаряд пушки массой 6 кг, ударившись о броню танка, массой 30т, под углом λ =30° к вертикали, рикошетирует. Найти изменение скорости танка, если скорость снаряда равна 500 м/с.

Задача Д 4.18

Тело массой 10 кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием силы Q, образующей с плоскостью угол λ =30°. Определить модуль силы, если за 5 секунд скорость тела возросла с 2 м/с до 4 м/с, коэффициент трения $f = 0{,}15$.

Задача Д 4.19

Матрос массой 80 кг перемещается по шлюпке массой 70 кг с относительной скоростью 1 м/с. Определить скорость шлюпки в зависимости от времени, считая сопротивление воды постоянным и равным R. В начальный момент времени матрос и шлюпка находились в покое.

Задача Д 4.20

Тяжелая точка спускается по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, без начальной скорости. Дойдя до низшего положения, она поднимается по плоскости, наклоненной под углом β к горизонту. Зная время спуска t_1, определить время подъема t_2, пренебрегая трением.

3.5. Теорема об изменении кинетического момента

Кинетическим моментом механической системы называют главный момент количеств движения всех точек системы:

$$\overline{L}_o = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k \,. \qquad (3.28)$$

Кинетический момент твердого тела относительно неподвижной оси вращения определяется формулой:

$$L_z = J_z \omega \,, \qquad (3.29)$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра равна главному вектору момента всех внешних сил, действующих на систему, относительного того же центра:

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}_O^E \,. \qquad (3.30)$$

Для твердого, тела вращающегося вокруг неподвижной оси *Oz*, последняя формула примет вид:

$$J_z \varepsilon = M_z^E \,, \qquad (3.31)$$

где ε – угловое ускорение твердого тела, c^{-2}.

Если момент внешних сил равен нулю, то имеем закон сохранения кинетического момента:

$$\overline{L}_O = \text{const} \,. \qquad (3.33)$$

Задачи

Задача Д 5.1

Материальная точка массой 5 кг в данный момент времени имеет скорость $\bar{V} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ (м/с), а ее положение относительно неподвижной системы отсчета *Oxyz* определяется радиусом вектором $\bar{r} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ (м). Найти модуль момента количества движения этой точки относительно начала координат *O*.

Задача Д 5.2

Однородный сплошной диск массой 10 кг и радиусом 0,5 м вращается вокруг вертикальной оси *Oz*, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, согласно закону: $\varphi = t^3/3 - t^2 - t$ (рад). По ободу диска против хода часовой стрелки равномерно движется материальная точка массой 0,1 кг с относительной скоростью 1 м/с. Определить кинетический момент системы диск-точка относительно оси *Oz* при t =1 с, если угол поворота φ диска отсчитывается против хода часовой стрелки.

Задача Д 5.3

Однородный конус массой 10 кг, находившийся в покое, под действием постоянного момента $M_{кр} = 6$ Н·м приводится во вращение вокруг оси *z*, совпадающей с осью симметрии конуса (рис. 3.21). Определить время, за которое скорость конуса станет ω =20 рад/с, если радиус основания конуса R =0,2 м.

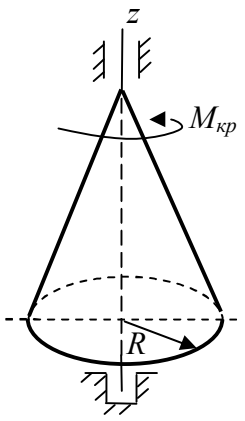


Рис. 3.21. Расчетная схема к задаче Д 5.3

Задача Д 5.4

Масса ступенчатого шкива $m_1 = 300$ кг, масса груза $m_2 = 400$ кг. Радиус инерции шкива $i = 30$ см, радиус малого диска $r = 15$ см, движущий момент $M = 1500$ Н·м. Определить угловое ускорение шкива (рис. 3.22).

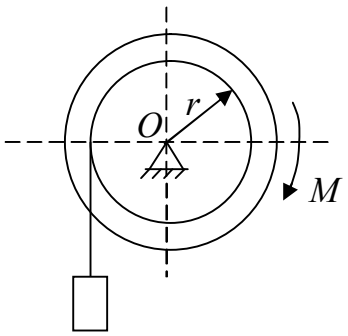
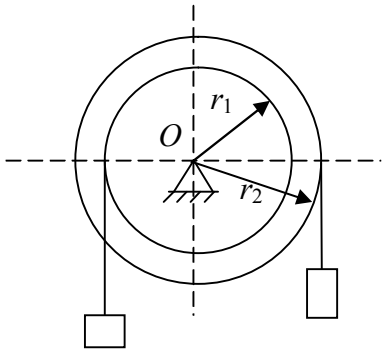


Рис. 3.22. Расчетная схема к задаче Д 5.4

Задача Д 5.5



Два диска радиусами $r_1 = 10$ см, $r_2 = 20$ см, жестко соединены между собой, образуя ступенчатый шкив, ось вращения которого горизонтальна. На шкиве намотаны нити, к концам которых подвешены грузы массами $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 30$ кг (рис. 3.23). Момент инерции шкива относительно оси вращения $J = 0{,}3$ кг·м^2. Определить угловое ускорение шкива.

Рис. 3.23. Расчетная схема к задаче Д 5.5

Задача Д 5.6

Горизонтальная трубка весом P и длиной l = 60 см вместе с шариком B, находящемся в ней на расстоянии a = 20 см от конца O и привязанным нитью к этому концу, сначала вращается по инерции вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O с постоянной угловой скоростью ω=4 c^{-1}, затем нить перерезают. Определить угловую скорость вращения трубки в момент, когда шарик вылетает из нее, если его вес равен 8 Н. Момент инерции трубки $J = 0{,}3$ кг$\cdot$м^2.

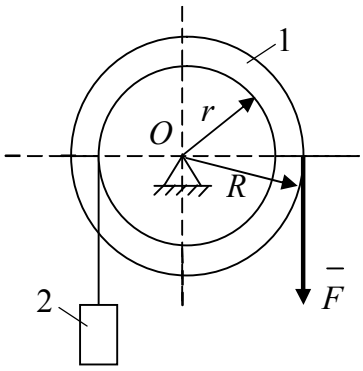


Рис. 3.24. Расчетная схема к задаче Д 5.7

Задача Д 5.7

Масса ступенчатого шкива $m_1 = 300$ кг, масса груза $m_2 = 400$ кг. Радиус инерции шкива $i = 30$ см, радиус малого диска $r = 20$ см, радиус большого диска $R = 40$ см, движущая сила $F = 5000$ Н. Определить угловое ускорение шкива 1 (рис. 3.24).

Задача Д 5.8

Однородный круглый диск радиуса R=OA=60 см и массой 20 кг вращается с угловой скоростью ω= 4 c^{-1}, вокруг неподвижной верти-

кальной оси *O*, перпендикулярной к его плоскости. В диске имеется прямолинейный канал *OA*, внутри которого находится шарик массой 50 кг. Сначала шарик находится в середине канала (в точке *B*) *OB*=*BA*. Определить угловую скорость диска в тот момент, когда шарик будет находиться на радиусе диска, т.е. в точке *A*.

Задача Д 5.9

Однородный круглый диск массой 1 кг и радиусом 1 м, расположенный в горизонтальной плоскости, вращается вокруг вертикальной оси, проходящей на расстоянии $OC = R/2$ от центра диска, под действием постоянного вращающегося момента $M_{вр} = 3$ Н·м. Определить угловую скорость диска через 1 с после начала движения, если начальная угловая скорость диска равна нулю.

Задача Д 5.10

Стержень, имеющий форму прямого угла *AOB*, может вращаться вокруг своей вертикальной стороны *AO*. На горизонтальную сторону *OB* свободно насажен груз *C*, рассматриваемый как материальная точка массой 100 кг. В начальный момент времени груз находится на расстоянии a = 20 см от точки *O*, и система имеет угловую скорость ω= 5 c^{-1}, вокруг оси *OA*. Найти угловую скорость стержня, когда груз переместится на расстоянии *OC*=30 см (рис. 3.25). Момент инерции стержня относительно оси *AO* – $J = 4\ кг \cdot м^2$.

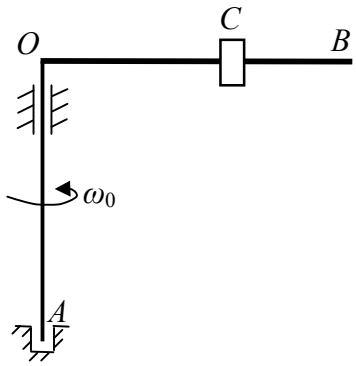


Рис. 3.25. Расчетная схема к задаче Д 5.10

Задача Д 5.11

Вал массой 10 кг и радиусом 0,1 м вращается с частотой n = 600 об/мин. С какой силой *Q* надо прижать к нему тормозную колодку, чтобы остановить его за 10 с, если коэффициент трения скольжения колодки о вал f = 0,4, а радиус инерции вала относительно оси вращения $i = 0{,}3$ м?

Задача Д 5.12

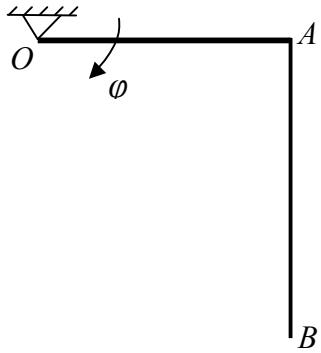


Рис. 3.26. Расчетная схема к задаче Д 5.12

Уголок *OAB* состоит из двух тонких однородных стержней *OA* и *AB*, с длинами *OA=l*, *AB=2l*, массами $m_{OA} = m$, $m_{AB} = 2m$ (рис. 3.26) В начальный момент времени стержень *OA* горизонтален, и уголок находится в покое. Затем он вращается в вертикальной плоскости вокруг оси *O*. Определить угловое ускорение уголка в момент, когда угол поворота $\varphi = \pi/2$, если $OA \perp AB$.

Задача Д 5.13

Однородная тонкая треугольная пластина с катетом a = 0,1 см (рис. 3.27) приводится во вращения из состояния покоя постоянным моментом $M_{вр} = 4$ Н·м вокруг вертикальной оси, совпадающей с одним из катетов. Найти закон вращения пластинки $\varphi = \varphi(t)$, если масса пластины $m = 2$ кг. При $t = 0$, $\varphi_0 = 0$.

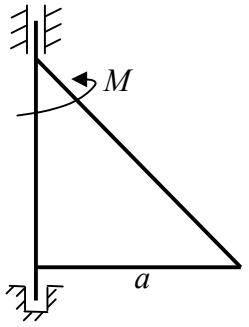


Рис. 3.27. Расчетная схема к задаче Д 5.13

Задача Д 5.14

Однородный тонкий прямолинейный стержень *AD* массой 1 кг и длиной *l* =2 м жестко прикреплен под прямым углом к вертикальной оси в точке *B* так, что *AB* =*l*/3. Пренебрегая сопротивлением, определить угловое ускорение стержня под действием вращающегося момента $M_{вр} = 4$ Н·м.

Задача Д 5.15

К барабану, момент инерции которого относительно оси вращения равен J_Z, приложен вращающийся момент $M_{вр} = A\sin kt$, где A и k – постоянные величины. Пренебрегая трением, определить угловую скорость барабана в момент времени $t_1 = \pi/k$, если $\omega_0 = 0$.

Задача Д 5.16

На вал диаметром 60 мм насажен маховик диаметром 50 см, делающий 180 об/мин. Определить коэффициент трения скольжения между валом и подшипниками, если после выключения привода маховик сделал 90 оборотов до остановки. Массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу, массой вала пренебречь.

Задача Д 5.17

Для определения момента трения в цапфах на вал насажен маховик весом 0,5 кН, радиус инерции маховика $i = 1{,}5$ м. Маховику сообщена угловая скорость, соответствующая 240 об/мин. Вращаясь по инерции 10 мин, он остановился. Определить момент трения, считая его постоянным.

Задача Д 5.18

Вычислить главный момент количества движения планетарной передачи относительно неподвижной оси *Oz*, совпадающей с осью вращения кривошипа *OC*. Неподвижное колесо 1 и подвижное колесо 3 одинакового радиуса *r*. Масса колеса 3 равна m_3. Колесо 2 массой m_2 имеет радиус r_2. Кривошип вращается с угловой скоростью ω_{oc}. Массой кривошипа пренебречь, колеса считать однородными дисками (рис. 3.28).

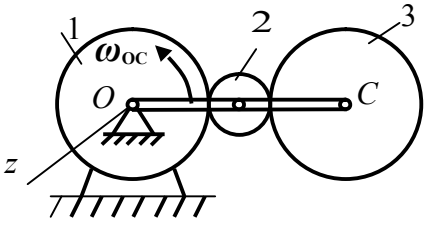


Рис. 3.28. Расчетная схема к задаче Д 5.18

Задача Д 5.19

Вычислить главный момент количества движения линейки *AB* эллипсографа (рис. 3.29) в абсолютном движении относительно оси *Oz*, совпадающей с осью вращения кривошипа *OC*, также в относительном движении по отношению к оси, проходящей через центр тяжести *C* линейки параллельно оси *z*. Кривошип вращается с угловой скоростью ω_{oc}, масса линейки равна m, *OC=AC=BC=l*.

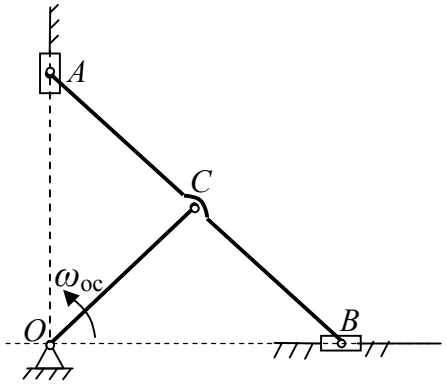


Рис. 3.29. Расчетная схема к задаче Д 5.19

Задача Д 5.20

Барабан весом G_A и радиусом r_A приводится во вращения посредством груза С весом G_C, привязанного к концу нерастяжимого троса. Трос переброшен через блок *B* и намотан на барабан *A*, как

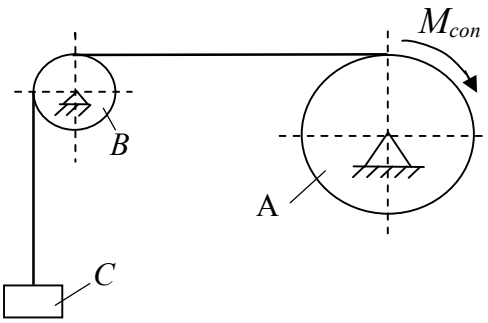


Рис. 3.30. Расчетная схема к задаче Д 5.20

показано на рис. 3.30. К барабану приложен момент сопротивления, пропорциональный угловой скорости барабана $M_{con} = k \cdot \omega$. Определить угловую скорость барабана, если в начальный момент времени система находилась в покое. Массой каната и блока *B* пренебречь. Барабан считать сплошным однородным цилиндром.

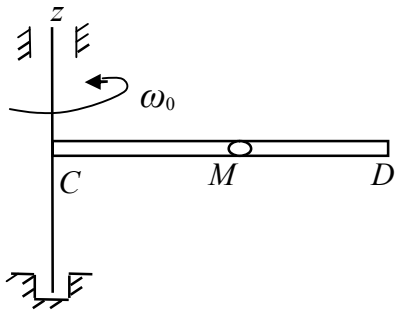


Рис. 3.31. Расчетная схема к задаче Д 5.21

Задача Д 5.21

Горизонтальная трубка *CD* свободно вращается вокруг вертикальной оси *z*. Внутри трубки на расстоянии *MC=a* от оси находится шарик *M* (рис. 3.31). Трубка вращается с угловой скоростью ω_O. Определить угловую скорость трубки в момент, когда шарик вылетит из нее. Момент инерции трубки относительно оси вращения J_Z, длина трубки – *L*. Трением можно пренебречь, шарик считать материальной точкой массой *m*.

3.6. Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия материальной точки скалярная положительная величина $\frac{mV^2}{2}$.

Кинетической энергией *T* механической системы, называется сумма кинетических энергий всех ее точек

$$T = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{m_k V_k^{\,2}}{2}. \qquad (3.33)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек, совершающих сложное движение, определяется выражением:

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \sum \frac{m_i V_{ir}^2}{2}, \qquad (3.34)$$

где *m* – масса всей системы;

V_C – скорость центра масс системы;

m_i – скорость *i*-ой точки системы,

V_{ir} – скорость i-ой точки в ее относительном движении относительно центра масс.

Равенство (3.35) выражает теорему Кенига.

Кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, определяется по формуле:

$$T = \frac{mV_C^2}{2}. \qquad (3.35)$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг оси Oz:

$$T = \frac{J_Z \omega^2}{2}, \qquad (3.36)$$

где J_Z – момент инерции твердого тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость тела.

Для плоского движения твердого тела кинетическая энергия рассчитывается по формуле:

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}, \qquad (3.37)$$

где J_c – момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр масс;

ω – угловая скорость тела.

Элементарная работа силы, приложенной к материальной точке, на бесконечно малом перемещении определяется формулой:

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = F_\tau \cdot dS = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz. \qquad (3.38)$$

Работа силы на конечном перемещении материальной точки:

$$A = \int \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int F_\tau \cdot dS = \int (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz). \qquad (3.39)$$

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути S:

$$A = F \cdot S \cdot \cos(\angle \overline{F}\overline{S}). \qquad (3.40)$$

Работа силы тяжести любой системы:

$$A(\overline{P}) = P(Z_{C1} - Z_{C2}), \qquad (3.41)$$

где P – вес всей системы,

Z_{C1}, Z_{C2} – аппликаты центра масс в начальном и конечном положении системы.

Работа упругой силы $F_x = -cx$ при прямолинейном перемещении точки равна:

$$A = c(x_1^2 - x_2^2)/2. \qquad (3.42)$$

Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, перемещающемуся произвольно, определяется по формуле:

$$dA = (\overline{R} \cdot \overline{V}_O + \overline{M}_O \cdot \overline{\omega})dt, \qquad (3.43)$$

где $\overline{R}$ и $\overline{M}_O$ – главный вектор и главный момент приложенных к телу сил;

O – произвольная точка тела.

Работа сил, приложенных к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси:

$$dA = M_Z d\varphi; \qquad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_Z d\varphi, \qquad (3.44)$$

где M_Z – главный момент всех сил относительно оси вращения Oz.

Сумма работ всех внутренних сил в абсолютно твердом теле равна нулю.

Мощность силы, приложенной к точке:

$$N = dA / dt = \overline{F} \cdot \overline{V} = F_\tau \cdot V = F_x V_x + F_y V_y + F_z V_z. \qquad (3.45)$$

Мощность сил, приложенных к твердому телу:

$$N = \overline{R} \cdot \overline{V}_o + \overline{M}_o \cdot \overline{\omega}. \qquad (3.46)$$

Для сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси:

$$N = M_Z \cdot \omega. \qquad (3.47)$$

В общем случае работа силы на криволинейном участке пути зависит от формы кривой, по которой перемещается точка. Если силы, действующие на точку таковы, что: $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x}$,

$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$, то работа не зависит от формы траектории точки, и поле сил называют *потенциальным*.

В этом случае:

$$dA = -d\Pi, \qquad A = \Pi_0 - \Pi_1, \tag{3.48}$$

где Π – потенциальная энергия точки;

Π_O, Π_1 – значение потенциальной энергии в начальном и конечном положении точки.

Потенциальная энергия поля силы тяжести:

$$\Pi = P \cdot z_c + const. \tag{3.49}$$

Если выбрана нулевая поверхность уровня, то получим:

$$\Pi = \pm P \cdot h, \tag{3.50}$$

где h – перепад высоты центра тяжести.

Изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему на том же перемещении:

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^E + \sum_{i=1}^{n} A_i^I. \tag{3.51}$$

Равенство (3.51) выражает *теорему об изменении кинетической энергии системы*. В отличие от предыдущих теорем, внутренние силы здесь не исключаются.

В случае неизменяемой системы, например, абсолютно твердого тела, сумма работ внутренних сил равна нулю и теорема приобретает вид:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^E. \tag{3.52}$$

Производная от кинетической энергии системы равна сумме мощностей всех сил, действующих на эту систему, т.е.:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} N_i^E + \sum_{i=1}^{n} N_i^I. \tag{3.53}$$

Если голономная механическая система движется в потенциальном силовом поле, то полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий и остается постоянной:

$$T + \Pi = const. \qquad (3.54)$$

Равенство (3.54) выражает *закон сохранения полной механической энергии*.

Задача Д 6.1

Шкивы A и B, соединенные ремнем (рис. 3.32), вращаются после выключения двигателя так, что шкив A имеет угловую скорость ω_O. Массы шкивов $m_A = 2m$, $m_B = m$. Чтобы затормозить вращение, к шкиву A радиусом R прижимают с силой Q тормозную колодку. Коэффициент трения колодки о шкив f. Пренебрегая трением в осях и считая шкивы сплошными однородными дисками, определить сколько оборотов сделает шкив A до остановки.

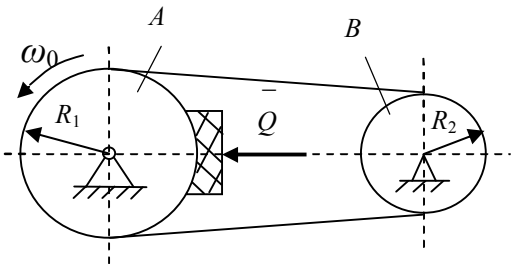


Рис. 3.32. Расчетная схема к задаче Д 6.1

Задача Д 6.2

Колесо массой m вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_O. В некоторый момент к колесу прижимают тормозную колодку с силой Q (рис. 3.33). Коэффициент трения колодки о колесо равен f, радиус колеса R. Пренебрегая трением в оси, определить через какое временя колесо остановится.

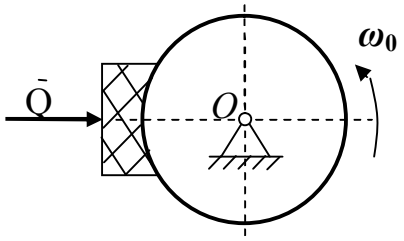


Рис. 3.33. Расчетная схема к задаче Д 6.2

Задача Д 6.3

Однородный цилиндр, получив начальную скорость центра, равную V_O, катится без скольжения вверх по наклонной плоскости. Пренебрегая трением качения и сопротивлением воздуха, определить, на какую высоту поднимется центр цилиндра.

Задача Д 6.4

В троллейбусе с инерционным двигателем на каждой промежуточной стоянке маховик разгоняется в течение 3 минут от 1,5 до

3000 об/мин, после чего вращаясь по инерции, он приводит в движение троллейбус. Масса маховика 1,5 т, диаметр 1,6 м. Считая маховик однородным диском, найти среднюю мощность двигателя, разгоняющего маховик. Сопротивлением пренебречь.

Задача Д 6.5

Автомобиль весом P движется прямолинейно по горизонтальной дороге со скоростью V. Коэффициент трения качения между колесами автомобиля и дорогой равен f, радиус колес r , сила аэродинамического сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости $R_C = \mu P V^2$, где μ – коэффициент, зависящий от формы автомобиля. Определить мощность двигателя, передаваемую на оси ведущих колес, в установившемся режиме.

Задача Д 6.6

Груз A весом $G_1 = 300$ Н при помощи каната приводит в движение однородный цилиндрический барабан весом $G_2 = 400$ Н и радиусом $R = 10$ см (рис. 3.34). Пренебрегая весом каната и сопротивлением, найти ускорение тела A.

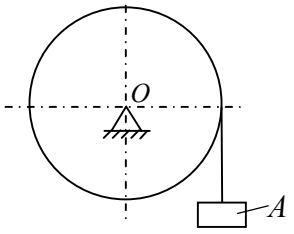


Рис. 3.34. Расчетная схема к задаче Д 6.6

Задача Д 6.7

Дано: масса тела A – $m_A = 4m$;

масса тела $Б$ – $m_Б = m$;

масса тела $Д$ – $m_Д = m$.

Скорость тела A – $V_A = 2$ м/с. Тела B и $Д$, изображенные на рис. 3.35, – однородные диски одинакового радиуса. Найти кинетическую энергию данной механической системы, если $m = 100$ кг.

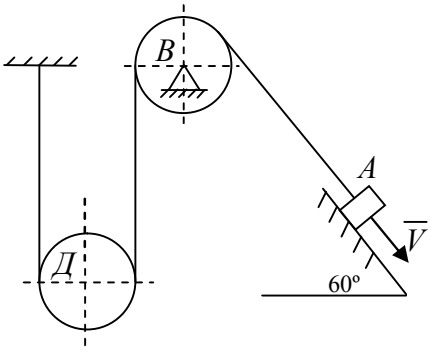


Рис. 3.35. Расчетная схема к задаче Д 6.7

Задача Д 6.8

На шкив радиусом 2 м и весом 1000 Н, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O, навернут канат, к концу которого подвешен груз A весом 2000 Н. Шкив приводят во вращение из состояния покоя при помощи рукоятки OB = 3 м, к концу ко-

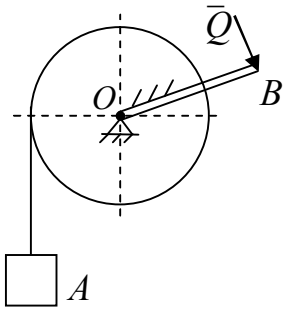


Рис. 3.36. Расчетная схема к задаче Д 6.8

торой приложена сила 3000 Н, перпендикулярная к *OB* (рис. 3.36). Определить угловую скорость шкива в тот момент, когда шкив повернется на один оборот. Масса шкива равномерно распределена по его ободу.

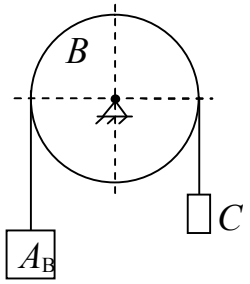


Рис. 3.37. Расчетная схема к задаче Д 6.9

Задача Д 6.9

Дано: масса тела A – $m_A = 4m$;

масса тела B – $m_B = m$;

масса тела C – $m_C = 2m$.

Тело B однородный цилиндр. Найти ускорение тела А. Массой троса и трением можно пренебречь (рис. 3.37).

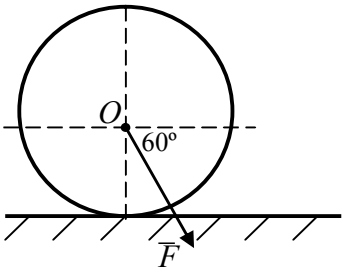


Рис. 3.38. Расчетная схема к задаче Д 6.10

Задача Д 6.10

Однородный цилиндр массой m =100 кг катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости за счет действия в центре O под углом α = 60° к горизонту постоянной силы F=500 Н (рис. 3.38). Какую скорость будет иметь центр O цилиндра при перемещении его на расстояние S =15 м. Трением качения пренебречь. Начальная скорость равна нулю.

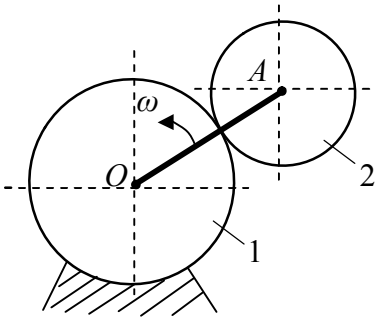


Рис. 3.39. Расчетная схема к задаче Д 6.11

Задача Д 6.11

Планетарный механизм, изображенный на рис. 3.39, состоит из однородного стержня *OA*, вращающегося вокруг неподвижной оси *O* с угловой скоростью $\omega = 4$ с$^{-1}$, и колес 1, 2. Причем колесо 2 – однородный диск массой 100 кг, радиусом 0,15 м. Оно свободно насажено на палец *A* кривошипа и находится во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Найти кинетическую энергию системы.

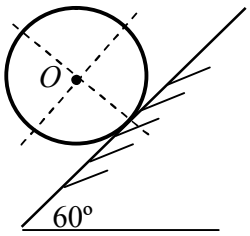


Рис. 3.40. Расчетная схема к задаче Д 6.12

Задача Д 6.12

Однородный цилиндр катиться по плоскости, наклоненной под углом α = 60° к горизонту (рис. 3.40). Какую скорость будет иметь центр *O*, сме-

стившись на расстояние S =10 м. Тре-нием качения пренебречь. Начальная

скорость равна нулю.

Задача Д 6.13

На тележке, движущейся по горизонтальному рельсовому пути с постоянной скоростью V=2 м/с, установлена лебедка, барабан которой имеет радиус r = 0,5 м и равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. На барабане намотан канат, с помощью которого осуществляется подъем груза (рис. 3.41). Установить, во сколько раз кинетическая энергия этого груза относительно пути больше его кинетической энергии относительно тележки.

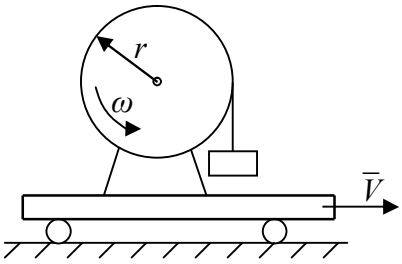


Рис. 3.41. Расчетная схема к задаче Д 6.13

Задача Д 6.14

Один конец пружины закреплен неподвижно с помощью шарнира O, а второй, свободный, конец M описывает эллиптическую траекторию, уравнение которой имеет вид: $x^2/4 + y^2/9 = 11$ (см). Зная жесткость пружины $c = 2$ $H/см$ и ее длину в недеформированном состоянии l =1 см, определить работу силы упругости при перемещении точки из положения M_1 на оси Ox в положение M_2 на оси Оу.

Задача Д 6.15

Материальная точка движется по окружности радиусом R =2 м под действием силы F, направленной к центру этой окружности и имеющей модуль F = 4 Н. Найти кинетическую энергию точки относительно инерциальной системы отсчета.

Задача Д 6.16

Эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством постоянного вращающегося момента M, приложенного к кривошипу OA. Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от его угла по-

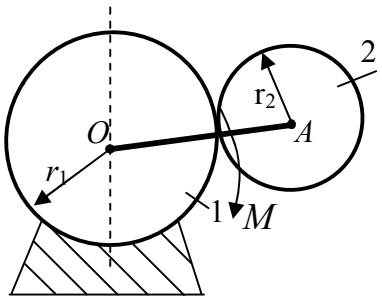


Рис. 3.42. Расчетная схема к задаче Д 6.16

ворота, если неподвижное колесо 1 имеет радиус r_1, подвижное колесо 2 – радиус r_2 и вес P, а кривошип OA вес Q (рис. 3.42).

Задача Д 6.17

К грузу A весом P прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок D весом P_2 и намотанная на боковую поверхность цилиндрического катка B весом P_3 (рис. 3.43). При движении груза A вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, вращается блок D, а каток B катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол β.

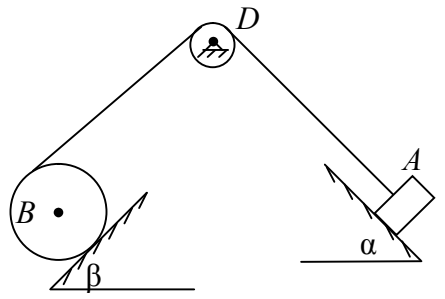


Рис. 3.43. Расчетная схема к задаче Д 6.17

Определить скорость груза A в зависимости от пройденного им пути S, если в начальный момент времени система находилась в покое. Блок D и каток B считать однородными круглыми цилиндрами. Силами трения и весом нити пренебречь.

Задача Д 6.18

Колесо A скатывается без скольжения по наклонной плоскости OK, поднимая посредством нерастяжимого троса колесо B, которое катится без скольжения по наклонной плоскости ON, изображенной на рис. 3.44. Трос переброшен через блок C, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Найти скорость центра масс колеса A при ее перемещении по оси OK на расстояние S. В начальный момент времени система находилась в покое. Оба колеса и блок считать однородными дисками одинакового веса и радиуса. Весом троса пренебречь.

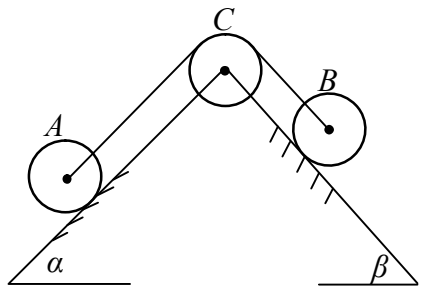


Рис. 3.44. Расчетная схема к задаче Д 6.18

Задача Д 6.19

Крестовина C приводится во вращение вокруг неподвижной оси O_1, посредством однородного стержня АВ, вращающегося вокруг неподвижной оси O_2 (рис. 3.45). Оси O_1, O_2 перпендикулярны к плоскости чертежа. При этом ползуны A и B, соединенные при помощи шар-

ниров со стержнем AB, скользят вдоль взаимно перпендикулярных прорезей крестовины C. Вращение стержней происходит под действием постоянного вращающегося момента M. Определить угловую скорость стержня AB в момент, когда он сделает четверть оборота. Если в начальный момент при φ=0 от имел угловую скорость ω_0. Величина момента сопротивления, возникающая в каждом из шарниров ползунов A и B, в два раза меньше вращающегося момента M. Прочими силами сопротивления пренебречь. Масса стержня равна m, момент инерции крестовины относительно оси O_1 равен J, $OO_1=OA=OB=l$.

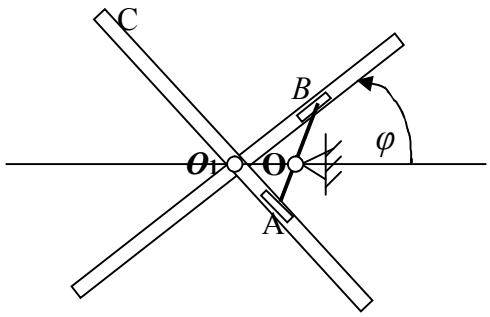


Рис. 3.45. Расчетная схема к задаче Д 6.19

Задача Д 6.20

При посадке на аэродром самолет имел скорость 20 см/с. Определить путь, пройденный самолетом до остановки, если сила сопротивления воздуха приближенно равна 6 т, вес каждого из передних колес равен 100 кг, радиус колес равен 0,5 м, вес самолета без колес 1100 кг, коэффициент трения качения колес о землю 1 см. Колеса считать однородными круглыми дисками. Массой заднего колеса и наличием тормозов пренебречь.

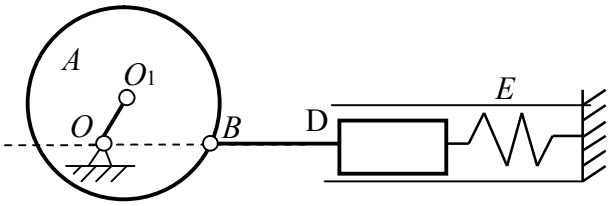


Рис. 3.46. Расчетная схема к задаче Д 6.21

Задача Д 6.21

В кулачковом механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, эксцентрик A приводит в возвратно-поступательное движение ролик B со штангой D (рис. 3.46). Пружина E, соединенная со штангой обеспечивает постоянный контакт ролика с эксцентриком. Вес эксцентрика равен P, эксцентриситет равен половине его радиуса, коэффициент упругости пружины – c. Какую угловую скорость надо сообщить эксцентрику для того, чтобы он переместил штангу из край-

него левого положения в крайнее правое. Массой ролика, штанги и пружины пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин, А.Л. Дворников. – М.: Высшая школа, 1983. – 270 с.

2. Дронг, В.И. Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.И. Дронт, В.В. Дубинин, М.М. Ильин; под общей ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 365 с.

3. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский – М.: Наука, 1982. – 448 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике/ Е.С. Пятницкий, Н.М. Турхан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко. – М., 1980. – 320 с.

5. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С.М. Тарг. – М.: Наука,1972. – 422 с.

6. Яблонский, А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А.А. Яблонский. – М.: Наука, 1981. – 360 с.

7. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учебник для вузов / А.А. Яблонский, В.М. Никифоров. – М.: Высшая школа, 2002. – 367 с.

Учебное издание

Ешуткин Дмитрий Никитович
Журавлева Анжелика Викторовна
Грядунова Елена Николаевна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
СБОРНИК ЗАДАЧ

Учебное пособие

Редактор И.А. Хлюпина
Технический редактор Н.А. Соловьева

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Государственный университет – учебно-научно-
производственный комплекс»
Лицензия ИД № 00670 от 05.01.2000 г.

Подписано к печати 24.02.2011 г. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 5,3. Тираж 120 экз.
Заказ №_____

Отпечатано с готового оригинал-макета
на полиграфической базе ФГОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК»,
302030, г. Орел, ул. Московская, 65.