

К.В. Подмастерьев

Точность измерительных устройств

$$y = f(x, q_1, q_2, \dots, q_N, v, \varepsilon)$$



Орел 2004

ГПЭРЕЛ
УНИВЕРСИТЕТ
50 ЛЕТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.В. Подмастерьев

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Учебное пособие

издание 2-е, дополненное и переработанное

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения и оплотехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов 653700 – Приборостроение, специальности 190100 – Приборостроение

Орел 2004

УДК 681.2(075)

ББК 34.9я7

П44

Рецензенты:

доктор технических наук, заведующий кафедрой
«Компьютерные измерения и компьютерная томография»
Санкт-Петербургского института точной механики и оптики
Иванов В.А.;

доктор технических наук, профессор кафедры
«Радиотехника и электроника» Академии ФАПСи
Иванов Б.Р.;

доктор технических наук, профессор кафедры
«Приборостроение, метрология и сертификация»
Орловского государственного технического университета
Коридорф С.Ф.

П44 Подмастерьев К.В. **Точность измерительных устройств:** Учебное пособие. – Изд. 2-е, доп. и перераб. / К.В. Подмастерьев. – Орел: ОрелГТУ, 2004. – 140 с.

Учебное пособие включает обобщенные сведения по теории точности преобразователей, приборов и систем на этапе их проектирования с изложением инженерных методов анализа точности и синтеза измерительных устройств по точностным критериям. В пособии рассматриваются основные задачи теории точности, излагаются методы расчета статических и динамических характеристик средств измерения, основных составляющих их погрешностей (погрешностей приближения, погрешностей от несоответствия параметров номинальным значениям, дополнительных и динамических погрешностей), методы суммирования погрешностей и пути повышения точности измерительных устройств.

Предназначается студентам, изучающим дисциплины «Точность измерительных приборов», «Основы проектирования аналитической биомедицинской техники» (специальность 190100 – Приборостроение), «Основы проектирования терапевтической и хирургической техники» (специальность 190600 – Инженерное дело в медико-биологической практике), а также выполняющим курсовое и дипломное проектирование по приборостроительным специальностям.

УДК 681.2(075)

ББК 34.9я7

ISBN 5-93932-034-1

© ОрелГТУ, 2004

© Подмастерьев К.В., 2004

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1. Основные задачи теории точности	8
1.1 Синтез и анализ, как основные процедуры проектирования	8
1.2 Структурные особенности измерительных устройств.....	9
2. Методы расчета характеристик измерительных устройств .	12
2.1 Расчет статических характеристик	12
2.1.1 Общие положения	12
2.1.2 Расчет характеристик при различных типах соединений звеньев	14
2.1.3 Пример определения расчетной характеристики прибора	17
2.2 Расчет динамических характеристик	18
2.3 Характеристики типовых динамических звеньев.....	20
3. Погрешности измерительных устройств	25
3.1 Классификация погрешностей.....	25
3.2 Причины возникновения и основные составляющие статических погрешностей	26
3.3 Причины возникновения и основные составляющие динамических погрешностей.....	30
4. Погрешность приближения	32
4.1 Методы расчета	32
4.2 Пути снижения влияния погрешности приближения на точность измерительного устройства.....	35
4.3 Параметрический синтез по критерию минимума погрешности приближения.....	38
4.3.1 Постановка задачи и теоретические основы синтеза.....	38
4.3.2 Полиномы Чебышева.....	39
4.3.3 Алгоритмы синтеза	43
4.3.4 Примеры синтеза	47
5. Погрешность от несоответствия параметров номинальным значениям	54
5.1 Общие понятия и подходы к расчету.....	54
5.2 Первичные погрешности	55
5.3 Методы определения частных погрешностей.....	60
5.3.1 Аналитический метод	60

5.3.2	Метод преобразованных схем.....	65
5.3.3	Геометрический метод.....	70
5.4	Определение частных погрешностей для скалярных первичных погрешностей	71
5.5	Определение частных погрешностей для векторных первичных погрешностей	74
5.6	Определение характеристик технологических погрешностей	77
5.7	Определение дополнительных погрешностей и функций влияния помех на погрешность	85
5.8	Суммирование частных погрешностей.....	87
6.	Расчет динамических погрешностей.....	92
6.1	Общие подходы к расчетам.....	92
6.2	Определение динамических погрешностей при детерминированных входных воздействиях	93
6.3	Расчет динамической погрешности, вызванной несоответствием параметров номинальным значениям.....	97
6.4	Расчет динамической погрешности при возмущающих воздействиях, ограниченных по модулю	100
7.	Методы анализа точности	103
7.1	Общие подходы к анализу точности.....	103
7.2	Метод максимума-минимума	104
7.3	Метод вероятностного анализа.....	106
7.4	Метод ситуационного моделирования	106
7.5	Определение суммарной погрешности устройства	110
8.	Методы повышения точности измерительных устройств ..	112
8.1	Конструктивно-технологические методы	112
8.2	Структурные методы	114
8.2.1	Классификация структурных методов.....	114
8.2.2	Повышение точности с помощью последовательных и параллельных корректирующих звеньев	114
8.2.3	Повышение точности с помощью встречно- параллельных корректирующих звеньев	118
8.2.4	Методы автоматической коррекции погрешностей.....	120
8.2.5	Структурные методы повышения динамической точности	125
8.3	Методы комплексирования.....	128

8.4 Оптимизация значений параметров	130
8.4.1 Критерий минимума математического ожидания погрешности	130
8.4.2 Критерий минимума дисперсии случайной погрешности	133
8.4.3 Критерии динамической точности прибора	137
Литература	139

ВВЕДЕНИЕ

К числу важнейших характеристик любого измерительного устройства (преобразователя, прибора, измерительной системы и т.п.) относится его точность, которая характеризует степень близости действительной функции преобразования сигнала к требуемой. Обеспечение требуемой точности является комплексной проблемой, решение которой осуществляется на различных этапах жизненного цикла изделия: проектирование, производство, техническое обслуживание и ремонт в процессе эксплуатации. При этом каждый этап характеризуется спецификой проводимых мероприятий, решаемых задач, используемых теорий, подходов и методов. На приведенном ниже рисунке схематично представлен перечень основных задач, решаемых на различных этапах жизненного цикла измерительного устройства по обеспечению его точности.

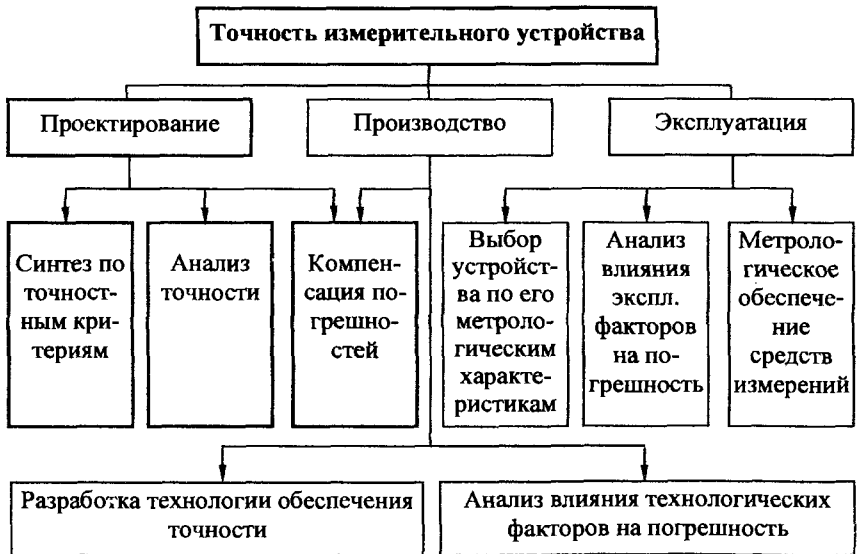


Рис. Задачи по обеспечению точности измерительных устройств

Данное пособие рассматривает вопросы обеспечения требуемой точности измерительных устройств на этапе их проектирования (основные задачи указаны в схеме на рисунке). При проектировании не-

обходимо создать устройство, которое обеспечивало бы требуемую точность при соблюдении целого комплекса экономических, технологических и других требований и условий. В зависимости от вида объекта проектирования (преобразователь, прибор, система и т.п.), принципа его действия и конструктивных особенностей имеется специфика решения задач по обеспечению его точности. В то же время существуют общие подходы и методы, позволяющие решать указанные задачи применительно к различным средствам измерения. Рассмотрению указанных методов посвящено данное пособие.

Задача обеспечения требуемой точности является многовариантной и весьма сложной, поскольку на точность влияет большое количество самых различных факторов. В основе методов ее решения лежит **теория точности** – учение о методах анализа и синтеза точности систем и их элементов. Настоящее пособие содержит обобщение представленных в различных изданиях сведений по теории точности на доступном для студентов уровне с изложением инженерных методов анализа точности и синтеза измерительных устройств по точностным критериям, рассмотрением путей повышения их точности.

1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОЧНОСТИ

1.1 Синтез и анализ, как основные процедуры проектирования

При проектировании измерительных устройств рассматриваются две основные задачи.

Прямая задача – синтез – заключается в определении структуры и рациональных параметров объекта, а также требований к характеристикам отдельных его блоков и узлов, деталей и элементов на основе заданных характеристик всего устройства. В соответствии с решаемыми задачами синтез подразделяется на структурный и параметрический. На этапе структурного синтеза определяются принципы построения измерительной цепи средства измерения, определяются его структурные, функциональные и принципиальные схемы. При параметрическом синтезе задаются значения параметров и размеров отдельных деталей и элементов.

Решение задачи параметрического синтеза представляет большие трудности, поскольку исходя из эксплуатационного назначения средства измерения и требуемых его характеристик, в частности точности, нужно решить вопрос о номинальных значениях и допускаемых отклонениях на все размеры и параметры узлов, блоков, деталей, элементов (рис. 1.1). Для механизмов сюда относятся также отклонения от правильной геометрической формы и расположения поверхностей, их шероховатость и т.п.

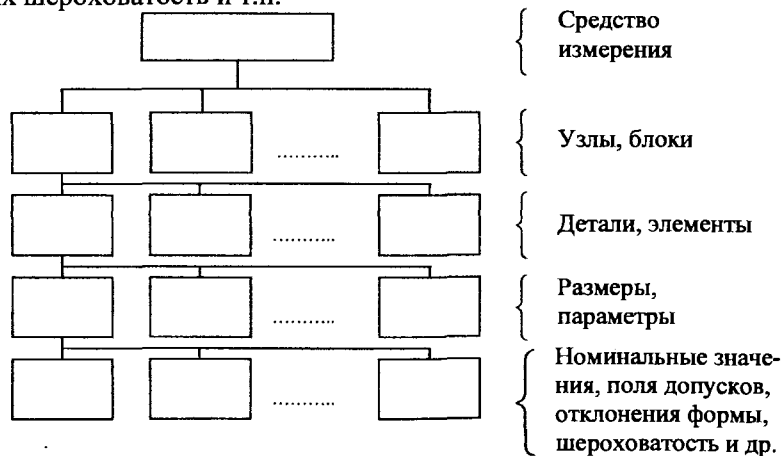


Рис. 1.1. Обобщенная структура средства измерения

В полном объеме данная задача на практике, как правило, не решается из-за ее сложности. Обычно при решении задачи синтеза задаются какими-то параметрами из конструктивных соображений, требований технологичности, унификации, стандартизации, с учетом экономических соображений и т.п. Другие же параметры определяют путем решения оптимизационных задач синтеза в соответствии с выбранными критериями. Задачи синтеза являются трудоемкими и обычно решаются с помощью вычислительной техники.

Обратная задача – анализ точности. Задача заключается в расчете результирующей точности измерительного устройства на основе разрабатываемых конструкторских схем, чертежей и точностных требований к отдельным деталям и элементам. Данная задача существенно проще прямой, так как она практически сводится к суммированию влияния отдельных составляющих погрешности и к определению общей погрешности проектируемого объекта.

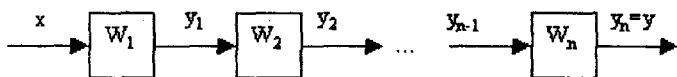
Исходя из расчетов при анализе обоснованно формируются требования к точности всего устройства, на основе которых обычно проводят приемо-сдаточные испытания. Кроме того, анализ помогает рационально откорректировать требования к отдельным деталям и элементам, исходя из учета влияния отдельных составляющих погрешности на суммарную неточность всего средства измерения и трудности технологического обеспечения необходимой точности отдельных размеров и параметров. Анализ точности дает возможность при проектировании сравнить различные варианты и выбрать наилучший из них, обосновать целесообразность проведения регулировки, скорректировать при необходимости конструкцию объекта путем введения в нее компенсаторов и регулировочных устройств.

Процесс проектирования включает в себя несколько циклов решения задач синтеза и анализа, они взаимосвязаны. На основе синтеза принимаются решения, с помощью анализа проверяется их эффективность, после чего вновь проводят синтез. И так до получения требуемого результата.

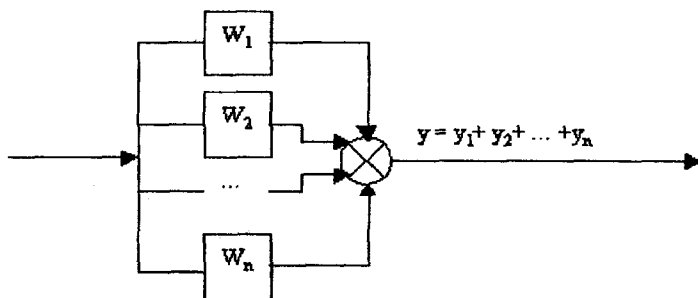
1.2 Структурные особенности измерительных устройств

Измерительные устройства различаются по целому ряду признаков (по положенным в основу физическим принципам, конструкции и назначению, степени сложности и т.п.), но все они обладают некото-

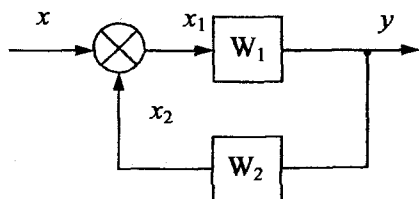
рыми общими признаками. Прежде всего, все измерительные устройства имеют измерительную цепь (возможно неявную), измеряемая величина воздействует на вход измерительной цепи, на выходе которой получают измерительную информацию. Измерительную цепь можно представить в виде ряда преобразователей (звеньев измерительной цепи). Звенья могут быть соединены различным образом, при этом существуют три элементарных вида соединений, с помощью которых можно описать структуру практически любого устройства. К их числу относятся: последовательное, параллельное согласное (параллельное) и параллельное встречное (встречно-параллельное) (рис. 1.2).



а



б



в

Рис. 1.2. Схемы последовательного (а), параллельного согласного (б) и параллельного встречного (в) соединения звеньев

В случае последовательного соединения звеньев выходной сигнал каждого предыдущего звена является входным сигналом последующего, то есть сигнал в объекте претерпевает ряд последовательных преобразований. При параллельном соединении звеньев входной сигнал одновременно поступает на входы нескольких преобразователей, выходные сигналы с которых затем суммируются. Встречно-параллельное соединение характеризуется тем, что выходной сигнал звена прямого преобразования поступает на звено обратной связи и после требуемого преобразования суммируется с входным сигналом.

Измерительное устройство может иметь различные виды соединения разнообразных звеньев. Основным видом соединения обычно является последовательное, обеспечивающее заданный закон преобразования сигнала. Параллельное соединение применяется для резервирования или комплексирования, а встречно-параллельное – для создания устройств с обратной связью. Эти два вида соединений используют, как правило, для обеспечения стабильности характеристик измерительных устройств, повышения их точности и надежности.

В общем случае измерительное устройство представляют как некий преобразователь информации, на вход которого поступает измеряемая величина – входной сигнал (x), а на выходе формируется другая величина – выходной сигнал (y), при этом y является функцией x , комплекса внутренних параметров (q_s) и внутренних дестабилизирующих факторов (ν), а также внешних возмущающих воздействий, оказывающих влияние на входной сигнал (ϵ) и на внутренние параметры (η_j) (рис. 1.3).

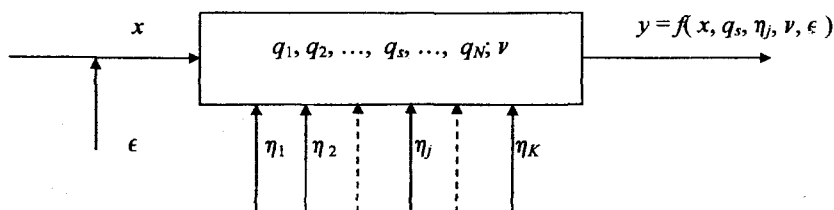


Рис. 1.3. Обобщенная модель измерительного устройства

2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

2.1 Расчет статических характеристик

2.1.1 Общие положения

Для проведения синтеза и анализа измерительного устройства составляется его математическое описание. Моделируя характеристику проектируемого устройства, в качестве исходной информации необходимо иметь его схему, раскрывающую принцип преобразования информации, и задаться перечнем параметров, влияющих на это преобразование. В зависимости от задачи дальнейших расчетов модель может учитывать те или иные факторы и не учитывать другие, при этом точность расчетов и их эффективность напрямую связаны с адекватностью модели реальному объекту.

Если устройство работает в статическом режиме, то это означает, что изменениями измеряемой величины, внутренних параметров и внешних возмущающих воздействий за время измерения можно пренебречь. Для описания измерительного устройства в данном случае применяют *функцию преобразования*. Функцию преобразования называют также *статической характеристикой*, а в случае, когда она получается экспериментально для конкретного экземпляра средства измерения, ее называют *градуировочной характеристикой*.

При составлении математического описания принципиально важным является различие трех видов статических характеристик.

1. *Заданная (требуемая, приписная) характеристика* – функциональная зависимость между входным и выходным сигналами, включающая числовые коэффициенты:

$$y_0 = f_0(x). \quad (2.1)$$

Характеристика задается техническими требованиями, техническим заданием на проектирование или принимается в процессе проектирования. Как правило, по этой характеристике строятся отсчетные устройства.

2. *Расчетная (теоретическая) характеристика* – полученное расчетным путем уравнение, выражающее функциональную зависимость выходного сигнала y не только от входного сигнала x , но и от

внутренних параметров и дестабилизирующих факторов измерительного устройства, внешних возмущающих воздействий. Характеристика имеет вид, представленный на рис. 1.3.

Расчетная характеристика получается после создания структурной схемы и конструкции средства измерения, когда выбраны принцип преобразования сигнала (структурная или функциональная схема), а также принципы построения отдельных измерительных преобразователей.

При расчетах в качестве внутренних параметров в данном уравнении часто используют номинальные значения размеров и параметров, приравнивая нулю значения дестабилизирующих факторов и возмущающих воздействий. В этом случае характеристику называют *номинальной расчетной*:

$$y_p = f_p(x, q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (2.2)$$

Расчетная характеристика является основой математического моделирования измерительного устройства на этапе проектирования. Она необходима для проведения как анализа, так и синтеза по точностным критериям.

3. *Индивидуальная (реальная, экспериментальная, градуировочная) характеристика* – зависимость выходного сигнала y от x для конкретного экземпляра устройства, когда все внутренние параметры принимают свои действительные значения:

$$y_n = f_n(x). \quad (2.3)$$

При проектировании стремятся выполнить условие $y_n(x) = y_0(x)$, обеспечивающее отсутствие погрешности измерительного устройства. Однако выполнить это равенство практически невозможно.

Для получения расчетной статической характеристики измерительного устройства рекомендуется следующий *алгоритм*:

– на основании принципиальной схемы или чертежей измерительного устройства выделяются элементарные преобразовательные звенья и устанавливаются связи между ними, т.е. составляется его функциональная схема;

– на основании априорной информации и справочных данных составляются функции преобразования элементарных звеньев и записываются уравнения связей;

– решается система уравнений, включающая характеристики элементарных преобразовательных звеньев и уравнения связей, составляется искомая расчетная характеристика.

2.1.2 Расчет характеристик при различных типах соединений звеньев

Последовательное соединение звеньев

При последовательном соединении звеньев согласно рис. 1.2а характеристики элементарных звеньев представляются как:

$$y_1 = f_1(x); \quad y_2 = f_2(y_1); \quad y_3 = f_3(y_2); \quad \dots; \quad y_n = f_n(y_{n-1}).$$

Принимая во внимание, что в данном случае выходной сигнал предыдущего звена является входным сигналом звена последующего, можно записать:

$$y = y_n = f_n\{f_{n-1} \dots f_2 [f_1(x)]\}.$$

Определим чувствительность всей цепи:

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dy_2}{dy_1} \cdot \frac{dy_3}{dy_2} \cdot \dots \cdot \frac{dy_n}{dy_{n-1}} = \prod_1^n S_i. \quad (2.4)$$

Таким образом, при последовательном соединении звеньев общая чувствительность определяется произведением чувствительностей звеньев.

При наличии в одном устройстве нескольких звеньев со сложными функциями преобразования возникает проблема определения вида его расчетной характеристики. В этом случае для визуализации статической характеристики применяется *графический метод* ее построения.

Сущность метода заключается в следующем. Пусть объект имеет три последовательно соединенных звена, тогда в первой четверти декартовой системы координат строят характеристику первого звена $y_1 = f_1(x)$, во второй четверти – характеристику второго звена $y_2 = f_2(y_1)$, в третьей – характеристику третьего звена $y_3 = f_3(y_2)$. Затем в четвертой четверти системы координат, пользуясь построениями, показанными на рис. 2.1, получают искомую зависимость $y_3 = f'(x)$.

При наличии более трех звеньев в схеме измерительного устройства используют дополнительную систему координат: в первой ее четверти строят характеристику $y_3 = f(x)$, во второй – характеристику $y_4 = f_4(y_3)$ и т.д.

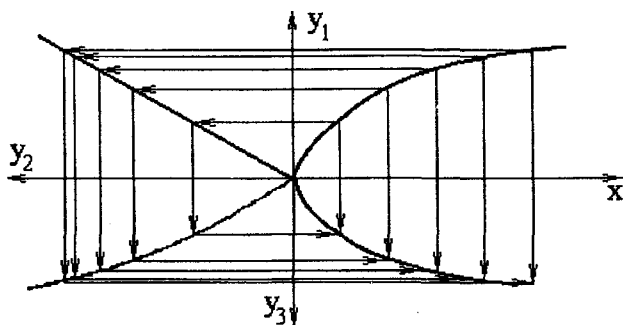


Рис. 2.1. Графический метод построения статической характеристики для последовательного соединения звеньев

Параллельное согласное соединение звеньев

При параллельном согласном соединении звеньев (рис. 1.2б) характеристики элементарных звеньев представляются как:

$$y_1 = f_1(x); \quad y_2 = f_2(x); \quad \dots \quad y_n = f_n(x),$$

а уравнение связи имеет вид:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

Определим чувствительность средства измерения:

$$S = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] = \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx} + \dots + \frac{df_n(x)}{dx} = \sum_1^n S_i \quad (2.5)$$

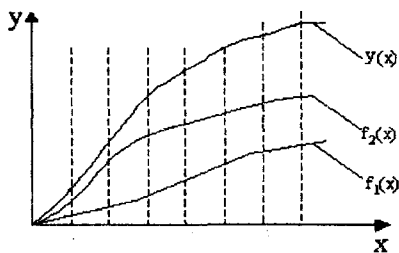


Рис. 2.2. Графический метод построения статической характеристики для параллельного согласного соединения звеньев

Таким образом, при параллельном согласном соединении звеньев общая чувствительность определяется суммой чувствительностей звеньев.

При графическом методе построения статической характеристики в одних осях координат строят все функции преобразования. Затем геометрическим сложением находят итоговую функцию (на рис. 2.2 представлен пример для объекта с двумя звеньями).

Параллельное встречное соединение звеньев

При параллельном встречном соединении звеньев (рис. 1.2в) характеристики элементарных звеньев представляются как:

$$y = f_1(x_1); \quad x_2 = f_2(y),$$

а уравнение связи имеет вид: $x_1 = x \pm x_2$, где знак «+» соответствует положительной обратной связи, а знак «-» – отрицательной.

Решая систему полученных уравнений согласно ранее изложенному алгоритму, определим статическую характеристику средства измерений:

$$y = f_1[x \pm f_2(y)].$$

Функция преобразования имеет неявный вид.

Определим чувствительность объекта:

$$S = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} = S_1 \cdot \frac{dx_1}{dx} = S_1 \cdot \frac{d(x \pm x_2)}{dx} = S_1 \left(\frac{dx}{dx} \pm \frac{dx_2}{dx} \right) = S_1 (1 \pm SS_2) = \frac{S_1}{1 \mp S_1 S_2}. \quad (2.6)$$

Знак «-» соответствует положительной обратной связи, а «+» – отрицательной.

2.1.3 Пример определения расчетной характеристики прибора

Определим расчетную характеристику индикатора часового типа, принципиальная схема которого представлена на рис. 2.3. Измерительный стержень 1 связан с зубчатой рейкой 2, в зацеплении с которой находится реечный триб 3. На одной оси с трибом 3 закреплено зубчатое колесо 4, входящее в зацепление со стрелочным трибом 5. Отсчет результата измерения осуществляется с помощью шкалы 6 и указателя 7, закрепленного на оси триба 5.

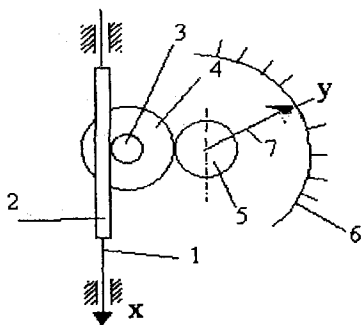


Рис. 2.3. Кинематическая схема индикатора часового типа

1. Согласно изложенному выше алгоритму прежде всего анализируется принципиальная схема, выявляются элементарные звенья (преобразователи), устанавливается характер связей между ними, составляется функциональная схема. В данном случае выделяются три последовательно соединенных звена (рис. 2.4): первичный преобразователь линейного перемещения в угловое – реечная пара (РП); масштабный преобразователь – зубчатая пара (ЗП); отсчетное устройство (ОУ).

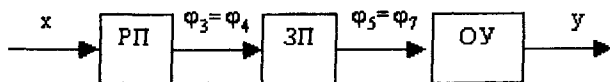


Рис. 2.4. Функциональная схема индикатора часового типа

2. Определим статические характеристики элементарных звеньев:

$$\varphi_3 = x \frac{1}{r_3}; \quad \varphi_5 = \varphi_4 \frac{Z_4}{Z_5}; \quad y = \varphi_7 \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}};$$

где r_3 – радиус делитель окружности триба 3;

C – цена деления;

$Z_{\text{шк}}$ – число делений шкалы;

$\Theta_{\text{шк}}$ – угол шкалы;

Z_4, Z_5 – числа зубьев колеса 4 и триба 5.

3. Определим чувствительности (передаточные отношения) звеньев:

$$S_{\text{РП}} = \frac{d\varphi_3}{dx} = \frac{1}{r_3}; \quad S_{\text{ЗП}} = \frac{d\varphi_5}{d\varphi_4} = \frac{Z_4}{Z_5}; \quad S_{\text{ОУ}} = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}}.$$

4. Определим расчетную статическую характеристику прибора с учетом последовательного соединения звеньев в виде:

$$y_{\text{расч}} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_4}{Z_5} \cdot \frac{1}{r_3} \cdot x.$$

5. Определим чувствительность прибора:

$$S = \frac{dy_{\text{расч}}}{dx} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_4}{Z_5} \cdot \frac{1}{r_3} = S_{\text{РП}} S_{\text{ЗП}} S_{\text{ОУ}},$$

что подтверждает ранее полученные зависимости чувствительности прибора от чувствительности звеньев при их последовательном соединении.

2.2 Расчет динамических характеристик

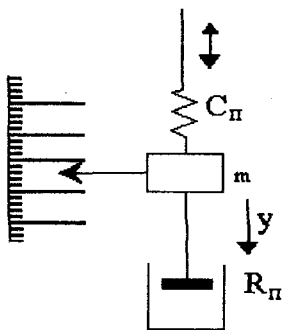


Рис. 2.5. Схема прибора

Для математического описания измерительного устройства в динамическом режиме можно использовать любую из полных динамических характеристик, поскольку каждая из них дает исчерпывающую информацию о динамических свойствах средства измерений. Полные характеристики могут быть получены одна из другой, поэтому достаточно рассчитать лишь одну из них. Наиболее широко применяются дифференциальное уравнение и передаточная функция.

При составлении дифференциального уравнения проводят анализ схемы объекта, выявляют типовые динамические звенья, рассматривают уравнения сил, моментов, потенциалов, энергий и на основании

физических законов, характеристик отдельных звеньев составляют дифференциальное уравнение, описывающее работу объекта.

Так, например, для представленной на рис. 2.5 измерительной цепи можно записать уравнение сил в виде:

$$F_{ин} + F_c + F_{упр} + F_{тр} = F_{дв};$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + R_n \frac{dy}{dt} + C_n y \pm F_{тр} = F_{дв},$$

где $F_{ин}$ – сила инерции;

$F_{упр}$ – сила упругости;

F_c – сила демпфирования;

$F_{тр}$ – сила трения;

$F_{дв}$ – движущая сила;

m – масса;

C_n – коэффициент жесткости;

R_n – коэффициент демпфирования.

Составление и дальнейшее решение дифференциального уравнения в ряде случаев является непростой процедурой. Поэтому наиболее приемлемым является **алгоритм**, аналогичный алгоритму расчета статических характеристик, согласно которому:

– на основании принципиальной схемы или чертежей измерительного устройства выделяются типовые динамические звенья и устанавливаются связи между ними, т.е. составляется его функциональная схема;

– на основании априорной информации и справочных данных составляются передаточные функции элементарных звеньев $W_i(p)$;

– с учетом характера соединений звеньев составляется передаточная функция объекта для последовательного $W_{п.с}(p)$, параллельного согласного $W_{п.с.}(p)$ и параллельного встречного $W_{п.в.}$ видов соединений по формулам:

$$W_{п.с}(p) = \prod_i^n W_i(p); \quad W_{п.с.}(p) = \sum_i^n W_i(p); \quad W_{п.в.}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}, \quad (2.7)$$

где $W_1(p)$ – общая передаточная функция цепи прямого преобразования;

$W_2(p)$ – общая передаточная функция цепи обратной связи.

При смешанном соединении звеньев методом последовательных преобразований функциональной схемы упрощают ее, заменяя группы звеньев с рассмотренными типами соединений на эквивалентные звенья. Пример такого преобразования представлен на рис. 2.6:

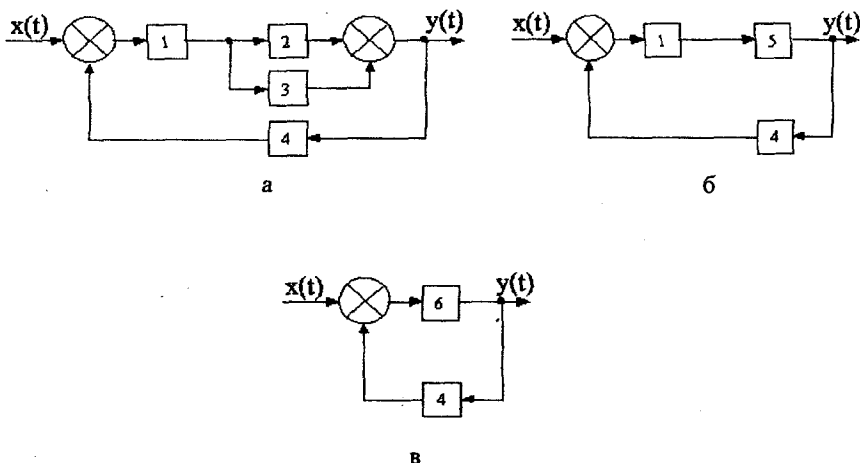


Рис. 2.6. Пример последовательного преобразования схемы

$$W_5(p) = W_2(p) + W_3(p);$$

$$W_6(p) = W_1(p) \cdot W_5(p) = W_1(p) \cdot [W_2(p) + W_3(p)];$$

$$W(p) = \frac{W_6(p)}{1 \mp W_6(p)W_4(p)} = \frac{W_1(p) \cdot [W_2(p) + W_3(p)]}{1 \mp W_1(p) \cdot W_4(p) \cdot [W_2(p) + W_3(p)]}.$$

2.3 Характеристики типовых динамических звеньев

При расчете динамических характеристик одной из основных задач является определение передаточных функций элементарных звеньев измерительной цепи. Характеристики многих преобразователей можно свести к характеристикам нескольких типовых звеньев или их комбинаций.

Под **типовым динамическим звеном** понимается устройство любого физического принципа и конструктивного исполнения (механические, электрические, акустические, тепловые и т.п.), работа которого описывается определенным дифференциальным уравнением. К наиболее распространенным типовым динамическим звеньям относятся: усилительное, дифференцирующее, интегрирующее, инерционное, колебательное и др. Для указанных звеньев в литературе имеются таблицы с приведением их основных динамических характеристик. Рассмотрим некоторые из них (табл. 2.1).

Усилительное звено реализует функцию $y(t) = S \cdot x(t)$, где S – чувствительность (для усилителя коэффициент усиления), а x и y – соответственно, входной и выходной сигналы. К таким звеньям относятся усилители, делители тока и напряжения, мостовые схемы, рычажные, зубчатые и другие механические передачи. Усилительное звено преобразует сигнал без искажений.

Дифференцирующее звено осуществляет преобразование вида: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cdot S$. К числу таких звеньев относятся тахогенераторы, дифференцирующие RC и LC контуры, включенные в обратную связь операционного усилителя, и др.

Интегрирующее звено реализует интегрирование входного сигнала, при этом $y(t) = S \int_0^t x(t) dt$, а $dy/dx = S \cdot x$. К таким звеньям относятся электродвигатели (шаговой конструкции), реверсивные счетчики, интегрирующие LC и RC контуры в цепях обратной связи.

Инерционное звено (апериодическое звено первого порядка) характеризуется уравнением вида: $T \frac{dy}{dt} + y = S \cdot x$. Это чувствительные элементы многих приборов, пневматические и гидравлические элементы, электронные цепи типа RC и LC . Если $t/T \ll 1$, то это звено преобразуется в интегрирующее, поэтому его называют также реальным интегрирующим звеном.

Реальное дифференцирующее звено описывается уравнением вида: $T \frac{dy}{dt} + y = S \frac{dx}{dt}$. Характерно, что при условии $\omega T \ll 1$ реальное звено становится идеальным дифференцирующим звеном, а при $\omega T \gg 1$ – усилительным.

Таблица 2.1

Характеристики типовых динамических звеньев

Наименование	Дифференциальное уравнение	Передающая функция	Переходная характеристика	АЧХ	ФЧХ
Усилительное	$y(t) = S \cdot x(t)$	$W(p) = S$	$U(\tau) = S \cdot 1(\tau)$	$K(\omega) = \text{const} = S$	$\varphi(\omega) = 0$
Дифференцирующее	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} S$	$W(p) = S \cdot p$	$U(\tau) = S \cdot d1(\tau)/d\tau = S$	$K(\omega) = S \cdot \omega$	$\varphi(\omega) = \pi/2$
Интегрирующее	$y(t) = S \int_0^t x(t) dt$	$W(p) = S/p$	$U(\tau) = S \cdot t$	$K(\omega) = S/\omega$	$\varphi(\omega) = -\pi/2$
Инерционное (реальное интегрирующее)	$T \frac{dy}{dt} + y = S \cdot x$	$W(p) = \frac{S}{Tp + 1}$	$U(\tau) = S \cdot (1 - e^{-\tau/T})$	$K(\omega) = \frac{S}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}$	$\varphi(\omega) = \text{arctg}(-\omega T)$
Реальное дифференцирующее	$T \frac{dy}{dt} + y = S \frac{dx}{dt}$	$W(p) = \frac{STp}{Tp + 1}$	$U(\tau) = S e^{-\tau/T}$	$K(\omega) = \frac{S\omega T}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}$	$\varphi(\omega) = \text{arctg} 1/\omega T$
Двигательное	$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = Sx$	$W(p) = \frac{S}{p(Tp + 1)}$		$K(\omega) = \frac{S}{\omega \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}$	$\varphi(\omega) = \text{arctg} 1/\omega T$

Многие преобразователи могут быть представлены в *виде колебательного звена* – системы, содержащей квазиупругие, инерционные и диссипативные элементы, между которыми происходит обмен энергией. К колебательным звеньям относят практически все электроизмерительные механизмы, электромеханические осциллографы, самописцы, акселерометры, виброметры. Колебательное звено описывается сложными уравнениями, включающими различные параметры моделируемой системы, при этом передаточную функцию можно представить в виде:

$$W(p) = \frac{S}{T^2 p^2 + 2dTp + 1},$$

где $d < 1$.

На рис. 2.7 представлены схемы колебательных звеньев электрической (а) и механической (б) измерительных цепей.

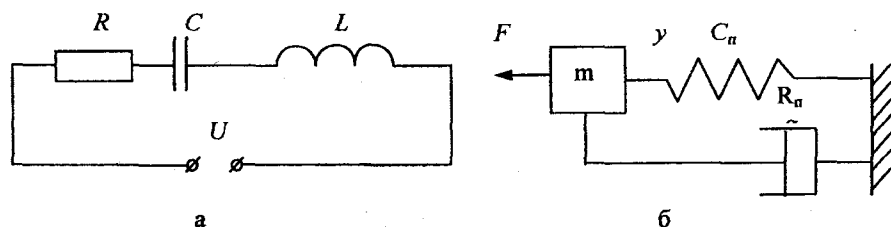


Рис. 2.7. Схемы электрического (а) и механического (б) колебательных звеньев

Характерно, что независимо от физической сущности преобразователей они описываются аналогичными дифференциальными уравнениями:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U(t); \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + R_n \frac{dy}{dt} + C_n y = F(t),$$

где q – заряд;

L – индуктивность;

C – емкость;

F – сила.

Переходя к другим динамическим характеристикам, отметим, что передаточная функция $W(p)$, переходная характеристика $U(t)$, амплитудночастотная $K(\omega)$ и фазочастотная $\phi(\omega)$ характеристики колебательного звена имеют вид:

$$W(p) = \frac{S}{T^2 p^2 + 2dT p + 1};$$

$$U(t) = S \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \sin \left(\beta t + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right];$$

$$K(\omega) = \frac{S}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4d^2 T^2 \omega^2}};$$

$$\phi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2d\omega}{1 - T^2 \omega^2},$$

где $\alpha = -\frac{d}{T}$, $\beta = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{T}$ — соответственно, действительная и мнимая части корней характеристического уравнения для дифференциального уравнения, описывающего работу колебательного звена.

Двигательное звено в чистом виде практически не существует и используется для моделирования механических и электромеханических измерительных устройств (электро-, гидро-, пневмодвигатели), в которых угол поворота выходного звена является интегралом от входного напряжения. Уравнение, описывающее работу указанных устройств, имеет вид:

$$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = Sx.$$

Анализ показывает, что по существу двигатель как динамическое звено состоит из последовательно соединенных инерционного и интегрирующего звеньев.

3. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

3.1 Классификация погрешностей

Точность средства измерения оценивается величиной *погрешности*, под которой понимается разность между его индивидуальной и заданной характеристиками (между показаниями прибора и значением измеряемой величины):

$$\Delta y(x) = y_n(x) - y_0(x). \quad (3.1)$$

Погрешность измерения, обусловленную погрешностью применяемого средства, часто называют *инструментальной (аппаратурной)*.

Существуют различные классификации погрешностей средств измерения, в основу которых закладываются различные классификационные признаки.

1. По характеру проявления и повторяемости при многократных измерениях погрешности бывают *систематическими* (остаются неизменными или закономерно изменяются) и *случайными* (изменяются случайным образом).

2. В зависимости от характера связи между значением погрешности и уровнем измеряемого сигнала систематические погрешности подразделяются на *постоянные – аддитивные* (не зависят от уровня сигнала) и *неаддитивные* (зависят от уровня сигнала). При этом характер зависимости неаддитивных погрешностей от уровня сигнала делит их на *мультипликативные – прогрессивные* (линейная зависимость), *степенные, периодические* и *изменяющиеся по сложному закону*.

3. В зависимости от режима работы средства измерения и характера изменения измеряемой величины погрешности бывают *статическими* (погрешность в статическом режиме, когда измеряемую величину принимают за неизменную) и *динамическими* (разница между погрешностью измерительного устройства в динамическом режиме и его статической погрешностью).

4. Числовое значение погрешности может быть представлено различным образом, при этом рассматриваются погрешности: *абсолютные*, когда значение представляется в единицах изменяемой величины; *относительные*, определяемые из выражения: $\gamma = \Delta y / y_d$, где

y_d — действительное значение измеряемой величины (допускается применять показание прибора y); *приведенные*, определяемые из выражения: $\gamma_n = \Delta y / y_N$, где y_N — принимаемое по определенным правилам нормирующее значение величины, постоянное во всем диапазоне (часто за y_N принимают диапазон преобразований).

5. В зависимости от условий определения погрешности подразделяют на *основные* (имеют место при нормальных условиях эксплуатации объекта) и *дополнительные* (возникают вследствие отклонения каких-либо влияющих величин от нормальных значений).

Деление погрешностей и их составляющих на классы позволяет учесть их особенности и свойства, при этом основная погрешность может быть, например, систематической или случайной, абсолютной или относительной.

3.2 Причины возникновения и основные составляющие статических погрешностей

Погрешность измерительного устройства, например прибора, возникает вследствие того, что не удастся обеспечить равенство заданной характеристики и характеристики индивидуальной (3.1). После задания требуемой характеристики в процессе проектирования объекта осуществляется его структурный и параметрический синтез, формируется номинальная расчетная характеристика, которая затем при изготовлении устройства в соответствии с установленными в конструкторской документации допусками преобразуется в индивидуальную. Изготовленный объект применяется в реальных условиях и режимах эксплуатации, также вносящих свой вклад в погрешность.

Таким образом, погрешность измерительного устройства может возникать на различных этапах его жизненного цикла, при этом на этапе проектирования необходимо уметь выявлять и оценивать отдельные составляющие погрешности, а также определять полную погрешность при проведении анализа точности.

Погрешность приближения (погрешность схемы) возникает в результате того, что при проектировании объекта на этапе его структурного синтеза с целью упрощения вместо заданной характеристики реализуется приближенная к ней характеристика, т.е. вид функций, реализующих заданную и расчетную характеристики, отличается. Это происходит тогда, когда невозможно или нецелесообразно точно rea-

лизовать заданную характеристику. Чаще всего эта проблема возникает, когда требуемая линейная характеристика реализуется звеньями с нелинейными функциями преобразования.

Введение на этапе структурного синтеза погрешности приближения при выполнении определенных условий по ее минимизации (см.: п. 4.2), как не парадоксально, приводит к значительному технико-экономическому положительному эффекту, обусловленному упрощением конструкции и технологии изготовления измерительного устройства. В результате повышается точность изготовления и сборки деталей и элементов, а суммарная погрешность оказывается меньше, чем у объекта с точной, но сложной схемой (небольшая погрешность приближения значительно перекрывается уменьшением технологических погрешностей). Кроме того, в связи с упрощением схемы повышается надежность и снижается себестоимость проектируемого устройства.

Следует отметить, что погрешность приближения – это систематическая погрешность, которая может присутствовать или отсутствовать в объекте.

Примерами приборов с погрешностью приближения можно считать нелинейные рычажно-зубчатые индикаторы с равномерной шкалой (рычаг в виде синусного или тангенсного механизмов имеет нелинейную характеристику), электрические приборы для измерения неэлектрических величин, построенные на базе неуравновешенного моста с нелинейной характеристикой, цифровые приборы (дискретизация или квантование сигнала приводят к несоответствию заданной и расчетной характеристик).

Погрешности от несоответствия размеров и параметров номинальным значениям возникают по ряду причин, в результате чего значения размеров и параметров деталей и элементов реальных измерительных устройств не соответствуют номинальным значениям, а индивидуальная характеристика отличается от номинальной расчетной, что приводит к указанной погрешности.

К погрешностям данного вида относят прежде всего *производственно-технологические погрешности*, обусловленные проблемами изготовления объекта. Ввиду назначения полей допусков на все размеры и параметры деталей и элементов в каждом экземпляре изготовленного измерительного устройства имеет место присущее только данному экземпляру сочетание действительных значений этих размеров и параметров.

Таким образом, реальная характеристика каждого устройства существенно индивидуальна и всегда отличается от номинальной расчетной. Поэтому технологические погрешности имеют место в любом средстве измерения и, как правило, носят случайный характер.

Источниками технологических погрешностей являются:

- несоответствие первичных компонентов и неидентичность технологических процессов при изготовлении материалов для деталей, что приводит к разбросу физических параметров (плотности, модуля упругости, удельного электрического сопротивления, магнитной проницаемости и т.п.);

- несовершенство технологических процессов и оборудования, применяемых при изготовлении деталей и элементов, включая термическую, гальваническую, магнитную и электрическую обработку, что вызывает рассеяние геометрических размеров и параметров деталей и элементов;

- несовершенство сборочных, регулировочных и контрольных приспособлений и операций, что приводит к погрешностям узлов и блоков при их сборке и регулировке.

К числу погрешностей от несоответствия параметров номинальным значениям относятся также *погрешности из-за износа деталей и старения материалов*, а также *погрешности от внешних воздействующих воздействий* (помех).

Влияющими факторами являются:

- климатические (температура, влажность, давление);
- механические (наклоны, переносные линейные и угловые ускорения, удары, вибрация);
- параметры режимов питания (напряжения, частота, давление, расход);

- параметры внешних полей (магнитных, электрических, радиационных, гравитационных) и т.п.

Исключить влияние внешних воздействий невозможно, поэтому погрешность данного типа всегда присутствует. Она является случайной, хотя может иметь существенную систематическую составляющую, например температурная погрешность.

Механизм влияния указанных факторов на погрешность средства измерения заключается, как правило, в их воздействии на значения внутренних параметров. Так, например, повышение температуры вызывает изменение линейных размеров деталей, упругих свойств мате-

риалов, электрического сопротивления проводников и т.п., что в свою очередь приводит к изменению функции преобразования измерительного устройства и к появлению указанной составляющей погрешности.

Если влияющие факторы изменяются в пределах, оговоренных нормальными условиями, то учет этих факторов производится на этапе расчета основной погрешности. Если изменения выходят за указанные пределы, то их учитывают при определении дополнительных погрешностей.

При анализе точности измерительных устройств, основанных на косвенных методах измерений, выделяется *погрешность метода*, возникающая каждый раз, когда параметры l_i ($i = 1, 2, \dots, n$), входящие в уравнение метода измерения: $x = f(l_i, x^*)$, где x – подлежащая измерению величина, а x^* – величина, на которую реагирует чувствительный элемент, не остаются постоянными. Примером такой погрешности может служить погрешность термоэлектрического термометра вследствие вариации температуры холодного спая.

Погрешности от действия внутренних дестабилизирующих факторов (материально-структурные погрешности) возникают под влиянием дополнительных (вредных) воздействий, не предусмотренных принципом действия прибора, что приводит к нарушению механического или другого вида равновесия измерительной цепи.

Для механизмов приборов это, прежде всего, силовые погрешности:

- силы и моменты трения в опорах, направляющих и шарнирных соединениях;
- силы и моменты от неуравновешенности подвижной системы;
- силы и моменты от взаимодействия подвижной системы с внутренними магнитными и электрическими полями;
- аэродинамические, гидродинамические силы и моменты, возникающие при обтекании подвижной системы воздушными или газовыми потоками;
- гидростатические силы (при расположении подвижной системы в жидкости) и т.п.

Для электронных и электромеханических цепей источниками таких воздействий являются:

- паразитные термо-ЭДС в соединениях разнородных проводников;
- сопротивления утечек;

- паразитные индуктивные и емкостные связи;
 - внутренние шумы радиоэлектронных элементов и т.п.
- Погрешности рассматриваемого типа носят случайный характер.

3.3 Причины возникновения и основные составляющие динамических погрешностей

Динамический режим характеризуется изменением измеряемой величины, внутренних параметров или внешних воздействий за время измерения. Основные причины возникновения динамических погрешностей аналогичны рассмотренным выше, при этом, однако, имеются специфические особенности. Остановимся на них подробнее.

Динамические погрешности подразделяются на две группы: *собственные* и *вынужденные*.

Источником *собственных* динамических погрешностей являются инерционные и демпфирующие элементы, характеризуемые определенными параметрами (массой, моментом инерции, электрической емкостью и индуктивностью, теплоемкостью и т.п.).

В приборах и системах часто применяются специальные преобразователи (успокоители). Особенность этих элементов заключается в том, что они вырабатывают силу, направленную против перемещения и пропорциональную скорости перемещения. Наряду со специальными устройствами определенными демпфирующими свойствами обладают сами подвижные системы приборов.

Наличие в измерительных цепях указанных элементов приводит, с одной стороны, к запаздыванию процесса преобразования и передачи информации, а с другой – к динамическим искажениям выходного сигнала.

В механических измерительных цепях, имеющих подвижную систему, основным источником погрешности являются инерционные массы. В случае преобразования тепловых величин имеет место запаздывание в установлении температуры. Причиной этого является теплоемкость чувствительных элементов. В электрических цепях источниками динамических погрешностей являются емкости, индуктивности, причем не только относящиеся к конкретным элементам, но и паразитные емкости, индуктивности, взаимоиндуктивности.

Вынужденные погрешности имеют источники в виде внутренних шумов и наводок, под влиянием которых в измерительной цепи гене-

рируется паразитная переменная составляющая сигнала. В отличие от собственной погрешности, которая имеет место только при изменении входной величины, вынужденная погрешность в виде переменной составляющей сигнала присутствует даже для случая, когда входная величина сохраняет постоянное значение (автоколебательные режимы работы, шумы отдельных элементов).

Внешние возмущающие факторы вызывают *дополнительные динамические погрешности*. Механизм влияния помех на динамическую точность аналогичен выше рассмотренному механизму – помеха влияет на внутренние параметры, которые, изменяясь вследствие этого, изменяют динамические характеристики средства измерения, что приводит к погрешности.

Рассмотрим примеры влияния различных факторов.

Климатические воздействия:

– при изменении температуры за счет изменения вязкости жидкости изменяется степень успокоения и длительность переходного процесса механической подвижной системы с жидкостным демпфированием.

Механические воздействия:

– линейная вибрация оказывает вредное влияние на устройства, содержащие механическую подвижную систему: если система не уравновешена, то под действием вибраций возникает знакопеременная инерционная сила, раскачивающая подвижную систему, что приводит к появлению переменной составляющей выходного сигнала;

– угловая вибрация (крутильные колебания): если ось колебаний совпадает или параллельна оси вращения подвижной системы, то при совпадении частот колебаний появляется переменная составляющая сигнала, причем ее амплитуда может быть очень значительной (если оси не параллельны, то наряду с переменной составляющей появляется постоянное смещение выходного сигнала);

– линейные и угловые переносные ускорения: возрастают силы трения, изменяется собственная частота колебаний механических систем.

Электрические и электромагнитные воздействия:

– внешние поля создают наводки в электрических цепях;

– пульсация напряжения питания электронных приборов приводят к появлению переменной составляющей в выходном сигнале.

4. ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ

4.1 Методы расчета

Для определения погрешности приближения наиболее приемлемым является *аналитический метод*, согласно которому погрешность находят как разность между номинальной расчетной и заданной характеристиками:

$$\Delta y_{\text{сх}} = y_p(x) - y_o(x). \quad (4.1)$$

Основу аналитического определения погрешности, таким образом, составляет математическое описание прибора (см.: п. 2.1)

Пример 1. Синусный рычажно-зубчатый механизм (рис. 4.1).

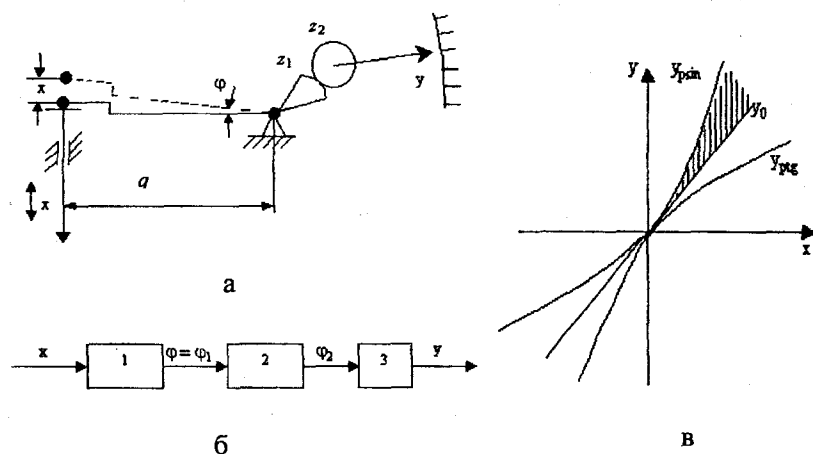


Рис. 4.1. Рычажно-зубчатый синусный измерительный механизм: а – принципиальная схема (q – длина рычага); б – функциональная схема; в – заданная и расчетные характеристики для синусного ($y_{p \sin}$) и тангенсного ($y_{p \text{тг}}$) механизмов

Составим математическое описание данного устройства:

$$\varphi = \varphi_1 = \arcsin(x/q);$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{Z_1}{Z_2};$$

$$y = \varphi_2 \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}};$$

$$y_{\text{расч}} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \arcsin \frac{x}{q}.$$

Заданная характеристика имеет вид. $y_0 = x$, тогда выражение для погрешности приближения можно представить в виде:

$$y_{\text{сх}} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \arcsin \frac{x}{q} - x. \quad (4.2)$$

Погрешность приближения является функцией измеряемой величины. На рис. 4.1в представлена также расчетная характеристика тангенсного механизма, иллюстрирующая наличие погрешности приближения (рис. 4.2).

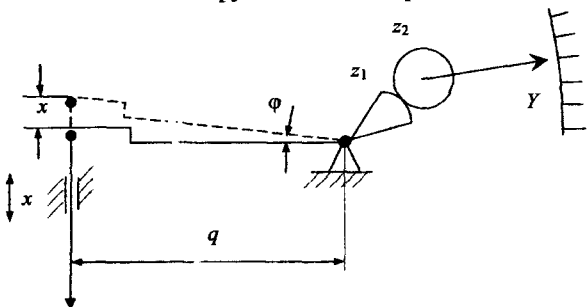


Рис. 4.2. Рычажно-зубчатый тангенсный измерительный механизм

Пример 2. Личейный потенциометр. Предназначен для преобразования перемещения (линейного или углового) в электрическое напряжение (рис. 4.3а). Требуемая характеристика – линейная: $U_0 = U_{ax} R_x / R_0$.

Анализ схем включения потенциометра показывает, что ввиду того, что в реальной схеме (рис. 4.3б) сопротивление источника сигнала на входе потенциометра $r \neq 0$, а сопротивление нагрузки на его выходе $R_n \neq \infty$, расчетная характеристика будет иметь нелинейный характер.

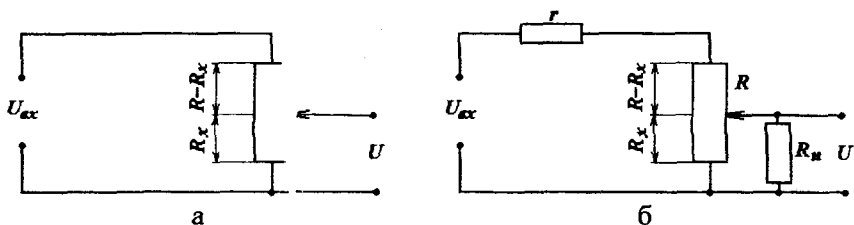


Рис. 4.3. Схемы включения потенциометра

Из закона Ома для замкнутой цепи можно записать:

$$U_p = I \cdot \frac{R_H R_x}{R_H + R_x} = \frac{U_{вх}}{(R - R_x) \cdot r + R_x R_H / (R_x + R_H)} \cdot \frac{R_x R_H}{R_x + R_H} =$$

$$= U_{вх} \cdot \frac{R_H R_x}{(r + R - R_x)(R_H + R_x) + R_H R_x}$$

Тогда выражение для функции погрешности приближения:

$$\Delta U_{сх} = U_{вх} R_x \left[\frac{R_H}{(r + R - R_x)(R_H + R_x) + R_H R_x} - \frac{1}{R} \right]. \quad (4.3)$$

При испытании опытных образцов средств измерений в ряде случаев возникает необходимость в оценке погрешности приближения, в этом случае применяют *экспериментальный метод*.

Для экспериментального определения берут N экземпляров однотипных объектов, каждый из которых n раз поверяют в m точках в пределах всего диапазона. Алгоритм определения погрешности следующий:

- каждое измерительное устройство многократно поверяют в выбранных точках и находят средние значения погрешностей в каждой точке;

- по средним значениям погрешностей, найденным для каждого устройства, определяют в тех же точках средние значения погрешностей для всей группы объектов;

– экспериментально полученные значения математически обрабатывают, например методом наименьших квадратов, для получения аналитической зависимости.

На первом этапе средние значения погрешностей для каждого объекта в каждой точке являются оценками их систематических погрешностей в соответствующих точках.

Для различных экземпляров систематическая погрешность в одной и той же точке различна, поскольку различны реальные значения размеров и параметров у каждого из них. Однако для всех средств измерений партии в систематическую погрешность входит составляющая одинаковая и не зависящая от конкретного образца. Это и есть погрешность приближения, значение которой определяется на втором этапе при усреднении средних погрешностей для каждого из объектов.

Третий этап предназначен для получения аналитической формулы для функции погрешности приближения на основании ее экспериментальных значений.

4.2 Пути снижения влияния погрешности приближения на точность измерительного устройства

Говоря об уменьшении погрешности приближения, следует помнить, что рассматриваемая погрешность является не конкретным значением, а функцией измеряемой величины, то есть в пределах диапазона преобразования она принимает различные значения. При нормировании точности во внимание принимается, как правило, максимальное значение погрешности. Поэтому под критерием минимума погрешности приближения будем понимать условие, при котором максимальное значение этой погрешности в пределах всего диапазона принимает минимально возможное значение.

Погрешность приближения является систематической, что определяет методы снижения ее влияния на результаты измерения. К числу наиболее распространенных методов можно отнести:

- регулирование объекта;
- проведение параметрического синтеза по критерию минимума погрешности приближения;
- введение в схему средства измерения корректирующих звеньев (компенсаторов);

- построение шкалы отсчетного устройства в соответствии с расчетной характеристикой (неравномерная шкала);
- внесение поправок в показания или функцию преобразования объекта.

Обычно параметрический синтез и регулировка обеспечивают пренебрежимо малые значения погрешности приближения. Если этого добиться не удастся и погрешность приближения остается существенной, то применяют другие методы.

Регулирование заключается в том, что путем изменения отдельных параметров добиваются уменьшения максимального в пределах диапазона значения погрешности приближения. Обычно различают два вида регулировки: регулировка рабочего участка и регулировка чувствительности.

Регулировка рабочего участка направлена на совмещение диапазона преобразования проектируемого устройства с участком его характеристики, наилучшим образом соответствующим заданной характеристике, в частности, обладающим наибольшей линейностью при нелинейной расчетной функции преобразования.

Обычно это достигается путем соответствующего задания начального положения звеньев измерительного механизма, начального смещения в электронных цепях. На рис. 4.4 представлены схема (а) и характеристики (б) синусного механизма в диапазоне измерения x от $x_{min} = 0$ до некоторого значения x_{max} .

Характеристика 1 соответствует горизонтальному начальному расположению рычага, а характеристика 2 – смещенному при регулировке положению при совмещении горизонтального положения с серединой диапазона. Во втором случае диапазону измерения соответствует наиболее линейный участок характеристики, что существенно снижает максимальное значение погрешности приближения.

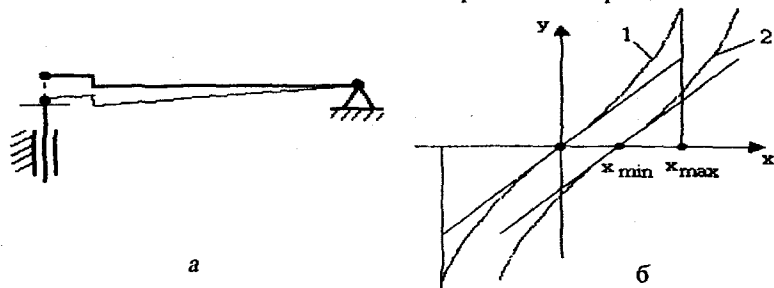


Рис. 4.4. Изменение характеристик преобразователя при регулировании рабочего участка

Регулировка чувствительности ставит задачу путем изменения соответствующих параметров цепи получить в заранее выбранных точках значение погрешности, равное нулю.

Например, для синусного измерительного механизма в случае, когда нулевому показанию шкалы соответствует начальное положение

механизма, длина рычага соответствует некоторому номинальному значению $q = q_0$, характеристика имеет вид 1 (рис. 4.5). В начале диапазона погрешность приближения равняется 0, а максимальное значение погрешности $\Delta y_{сх1}$ соответствует максимальному значению диапазона. Этот случай называют регулированием по одной точке.

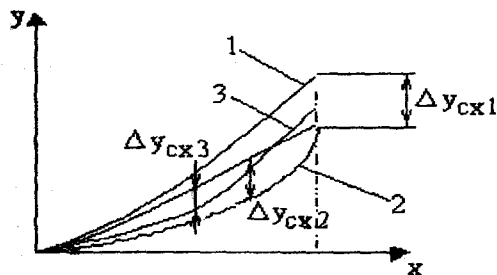


Рис. 4.5. Изменение характеристик преобразователя при регулировании чувствительности

Изменяя длину рычага, можно регулировать чувствительность преобразователя и как бы поворачивать расчетную характеристику $y_p = \arcsin(x/q)$ относительно нуля. При этом можно выбрать q таким образом, чтобы погрешность приближения равнялась нулю в двух предельных значениях диапазона (кривая 2). Не приводя подробных выводов, отметим, что в этом случае $q_1 > q_0$, $q_1 = q_0 \alpha_{\max} / \sin \alpha_{\max}$, а максимальное значение погрешности $\Delta y_{сх2}$ лежит внутри диапазона и в несколько раз меньше $\Delta y_{сх1}$. Этот метод называют, регулированием по двум точкам.

Еще большего эффекта можно достичь, изменив длину рычага до значения, при котором наибольшие отрицательное и положительное значения погрешности приближения оказались равными по модулю (кривая 3). Это, так называемый, метод половинения погрешности, или регулирование по двум точкам с дополнительным условием. При такой регулировке максимальная погрешность ($\Delta y_{сх3}$) уменьшается еще приблизительно в полтора раза.

При регулировании осуществляют калибровку средства измерения в выбранных точках и изменение параметров до получения нулевых значений погрешности. Из приведенного выше анализа видно, что усовершенствование и, соответственно, усложнение процесса регулирования приводит к повышению его эффективности.

4.3 Параметрический синтез по критерию минимума погрешности приближения

4.3.1 Постановка задачи и теоретические основы синтеза

Из рассмотренных выше примеров видно, что, изменяя незначительно действительные значения параметров проектируемого измерительного устройства, можно существенно влиять на его функцию погрешности. Поэтому при проектировании на этапе параметрического синтеза открывается возможность задания наиболее рациональных значений внутренних параметров, обеспечивающих, в частности, минимизацию погрешности приближения.

Математическая формулировка условий выбора параметров при точностном синтезе заключается в следующем: внутренние параметры q_1, q_2, \dots, q_N , входящие в выражение для функции погрешности $\Delta y_{\text{сх}}(x, q_1, q_2, \dots, q_N)$, должны обеспечивать наименьшее отклонение этой функции от нуля в заданном диапазоне входного воздействия $x \in [a; b]$, где a и b , соответственно, нижний и верхний пределы преобразования.

Решение такой задачи даже для сравнительно простых преобразователей точными методами является весьма трудоемким. Поэтому на практике обычно пользуются приближенными методами расчета.

Возможны два подхода к решению этой задачи.

Первый подход заключается в последовательном рассмотрении различных комбинаций значений параметров, с расчетом для каждой из них максимального значения погрешности приближения. Выбирается комбинация, при которой максимальное значение погрешности является минимальным. Соответствующие этой комбинации значения параметров с точностью до шага дискретизации при их задании можно считать оптимальными по критерию минимума погрешности приближения.

Решение задачи рассмотренным методом возможно только с использованием ЭВМ, поскольку требует огромного объема вычислительных операций даже для сравнительно простых объектов. Существуют специальные математические методы и соответствующие программы оптимизации многопараметрических функций, которые позволяют существенно сократить объем вычислений.

Второй подход к решению задачи заключается в аналитическом определении оптимальных параметров с использованием полиномов

Чебышева. Метод основывается на следующих теоретических положениях:

1. Большинство преобразователей имеют функции преобразования, которые характеризуются плавным изменением и непрерывностью в диапазоне преобразования. Такими же свойствами обладает и функция погрешности, которая является дифференцируемой в рассматриваемом диапазоне и с любой степенью точности может быть представлена в виде полинома степени n . То есть всегда можно найти многочлен достаточно высокой степени n , который будет отличаться от функции $\Delta y_{\text{сх}}(x, q_1, q_2, \dots, q_N)$ на сколь угодно малую наперед заданную величину.

2. П.Л. Чебышевым доказано, что среди всех степенных полиномов вида $y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n$ степени n с коэффициентом при x^n , равным 1, наименее уклоняющимся от нуля в интервале $[-1; 1]$ является многочлен:

$$P_n(x) = x^n - 0,25nx^{n-2} + \dots + (-0,25)^k \frac{n}{k} C_{n-k-1}^{k-1} x^{n-2k} + \dots, \quad (4.4)$$

а в интервале $[0; 1]$ – многочлен вида:

$$R_n(x) = \frac{1}{[1 + \cos(\pi/2n)]^n} P_n\{x[1 + \cos(\pi/2n)] - \cos(\pi/2n)\}. \quad (4.5)$$

3. Если внутренние параметры объекта обеспечат совпадение функции погрешности с полиномом Чебышева соответствующей степени, то функция погрешности окажется наименее уклоняющейся от нуля, а ее максимум примет минимально возможное значение, т.е. задача параметрического синтеза будет решена.

Таким образом, задача синтеза по критерию минимума погрешности приближения сводится к расчету значений внутренних параметров q_s , при которых функция $\Delta y_{\text{сх}}(x, q_1, q_2, \dots, q_N)$ с наперед заданной степенью точности совпадет с функцией $P_n(x)$ или $R_n(x)$.

4.3.2 Полиномы Чебышева

В табл. 4.1 и 4.2 приведены аналитические выражения и основные характеристики полиномов Чебышева для значений n от 2 до 5, а на

рис. 4.6 и 4.7, соответственно, графики этих полиномов. Из графиков видно, что функции попеременно уклоняются от нуля вверх и вниз на одну и ту же величину, причем эти отклонения имеют место в $n + 1$ точках, включая границы диапазона. С увеличением n максимальное отклонение уменьшается.

Таблица 4.1

Характеристики полиномов Чебышева $P_n(x)$

n	$P_n(x)$	Корни x_k	Точки наибольшего отклонения x'_i	Значения наибольшего отклонения λ_n
2	$x^2 - 0,5$	$\pm 0,7071$	$0; \pm 1$	0,5
3	$x^3 - 0,75x$	$0; \pm 0,8660$	$\pm 0,5; \pm 1$	0,25
4	$x^4 - x^2 + 0,125$	$\pm 0,3827; \pm 0,9239$	$0; \pm 1; \pm 0,7071$	0,125
5	$x^5 - 1,25x^3 + 0,3125x$	$0; \pm 0,5878; \pm 0,9511$	$\pm 1; \pm 0,309; \pm ,809$	0,0625

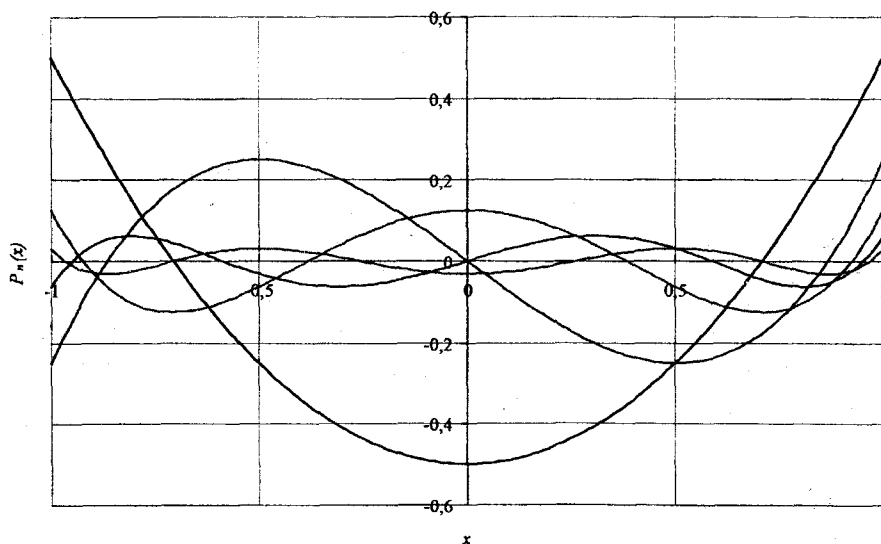
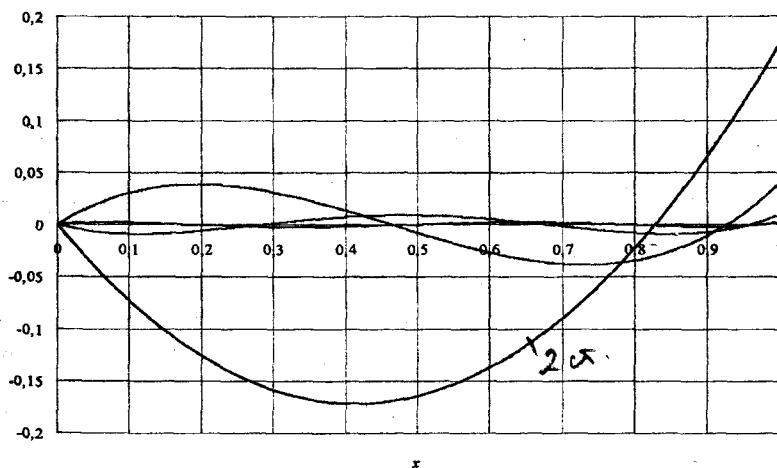


Рис. 4.6. Функции $P_n(x)$ в пределах $[-1; +1]$

Таблица 4.2

Характеристики полиномов Чебышева $R_n(x)$

n	$R_n(x)$	Корни x_k	Точки наибольшего отклонения x_i	Значение наибольшего отклонения λ_n
2	$x^2 - 0,8284x$	0; 0,8284	0,4142	0,1716
3	$x^3 - 1,3923x^2 + 0,4308x$	0; 0,4641; 0,9282	0,1961; 0,7320; 1	0,0385
4	$x^4 - 1,9209x^3 + 1,1135x^2 - 0,1835x$	0; 0,2813; 0,6761; 0,9604	0,1127; 0,4802; 0,8478; 1	0,0091
5	$x^5 - 2,4373x^4 + 2,0477x^3 - 0,6781x^2 + 0,0698x$	0; 0,1862; 0,4875; 0,7887; 0,9749	0,0728; 0,3291; 0,6458; 0,9021	0,0022

Рис. 4.7. Функции $R_n(x)$ в пределах $[0; +1]$

Таким образом, выбрав показатель степени полинома n и приравняв функцию погрешности соответствующему полиному, можно рас-

считать значения внутренних параметров. Однако для этого необходимо, чтобы диапазон изменения входной величины соответствовал диапазону определения полинома Чебышева. В общем случае эти диапазоны не совпадают. Необходимо осуществить замену переменной, входящей в функцию погрешности.

Пусть измеряемая величина изменяется в диапазоне от a до b . Чтобы реализовать полином Чебышева $P_n(x)$ для указанного диапазона необходимо заменить x на t согласно формуле:

$$t = (2x - a - b)/(b - a). \quad (4.6)$$

Так, например, пусть x изменяется в пределах $a = -0,4$ и $b = 0,4$. Перейдем к переменной t , изменяющейся от -1 до $+1$:

$$t = [2x - (-0,4) - 0,4]/[0,4 - (-0,4)] = 2x/0,8 = x/0,4.$$

Для полинома $R_n(x)$ замена переменных осуществляется по формуле:

$$t = x/b. \quad (4.7)$$

Так, например, для области определения $x \in [0; +0,4]$ замена переменной производится по формуле $t = x/0,4$.

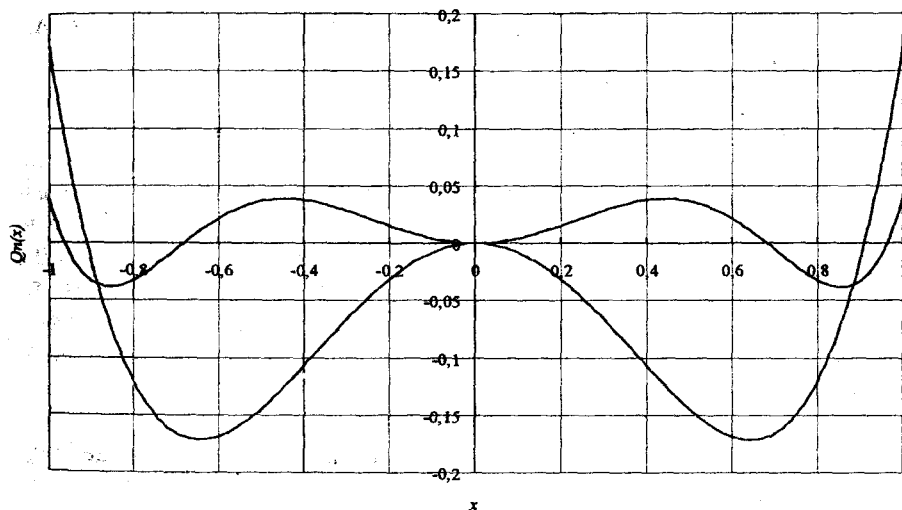
Применение полиномов того или иного вида при точностном синтезе обусловлено их спецификой.

Полиномы $P_n(x)$ определены в области входных воздействий $[-1; +1]$, поэтому их применение наиболее целесообразно при синтезе средств, реализующих относительные измерения. При этом полиномы нечетных степеней ($n = 3; 5; \dots$) имеют нулевые корни, а полиномы четных степеней ($n = 2; 4; \dots$), наоборот, в середине диапазона имеют наибольшее отклонение. Полиномы $R_n(x)$ независимо от степени имеют нулевые корни, однако определены в области $[0; +1]$. Для объектов с симметричным диапазоном измерения наряду с полиномами $P_n(x)$ применяются полиномы $Q_n(x)$ (табл. 4.3, рис. 4.8), которые определены на интервале $[-1; +1]$, однако для четных степеней имеют нулевые корни.

Таблица 4.3

Характеристики полиномов Чебышева $Q_n(x)$

n	$Q_n(x)$	Значение наибольшего отклонения λ_n	Точки наибольшего отклонения x'_i	Корни x_k
4	$x^4 - 0,8284x^2$	0,1716	$\pm 0,6436; \pm 1$	0; $\pm 0,9102$
5	$x^6 - 1,3923x^4 + 0,4308x^2$	0,0385	$\pm 0,4429; \pm 0,8556; \pm 1$	0; $\pm 0,6813; \pm 0,9634$

Рис. 4.8. Функции $Q_n(x)$ в пределах $[-1; +1]$

4.3.3 Алгоритмы синтеза

При синтезе параметров средства измерения по критерию минимума погрешности приближения согласно указанным выше положениям необходимо выполнить следующие действия.

1. Составление математического описания объекта проектирования и получение аналитического выражения для погрешности схемы.

Выполняется в соответствии с рекомендациями п.п. 2.1 и 4.1 на базе выбранной функциональной и принципиальной схем.

2. *Определение допускаемого значения погрешности приближения.*

Допускаемое значение $|\Delta y_{\text{сх}}|$ выбирается с учетом назначения средства измерения и требуемой его точности. Следует помнить, что погрешность приближения – это лишь составляющая полной погрешности Δy , поэтому следует обеспечивать запас по точности на другие составляющие. Рекомендуется примерное соотношение:

$$|\Delta y_{\text{сх}}| \approx 0,1 |\Delta y|, \quad (4.8)$$

где $|\Delta y|$ – допускаемое значение полной погрешности (иногда за $|\Delta y|$ принимают цену деления).

3. *Выбор вида полинома Чебышева.*

Осуществляется на основе анализа вида расчетной характеристики, диапазона изменения входного воздействия, характеристики ~~от~~счетного устройства и т.п. Если средство предназначено для относительных измерений при симметричных пределах и расположении 0 в середине диапазона, то для точностного синтеза рекомендуются полиномы $P_n(x)$ с нечетными степенями или $Q_n(x)$ со степенями $n = 4; 6$. Если ноль находится в начале шкалы, то наиболее предпочтительными являются полиномы $R_n(x)$.

4. *Определение наименьшей степени полинома.*

Степень полинома должна обеспечивать идентичность вида функции погрешности в рассматриваемом диапазоне виду полинома Чебышева, поэтому, если имеется возможность, целесообразно вначале определиться с видом функции погрешности.

Для наиболее распространенных преобразователей в специальной литературе имеются рекомендации по выбору n . Так, например для синусных и тангенсных механизмов рекомендуется степень 3. Если априорной информации о степени полинома нет, то можно проанализировать функцию погрешности, построить ее график в исследуемом диапазоне, сравнить этот график с графиками полиномов Чебышева, определиться с ожидаемым количеством корней этой функции в диапазоне.

Необходимо принимать во внимание, что увеличение n приводит, в общем случае, к повышению точности расчета, поскольку с ростом

и точность описания функции погрешности полиномом будет выше. Кроме того, с увеличением n при оптимизации увеличивается точность средства измерения, поскольку уменьшается наибольшее отклонения от нуля (погрешность приближения). Однако чрезмерное повышение n приводит к существенному росту сложности расчетов и в ряде случаев неадекватно отражает реальную функцию погрешности. Поэтому следует брать наименьшее значение степени, обеспечивающее предельную погрешность приближения.

На практике на первом этапе синтеза рекомендуется выбирать n , равным 2 или 3, указанное значение в дальнейшем будет уточняться.

5. Проведение замены переменных.

Замену переменных проводят в соответствии с выражениями (4.6) для полиномов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ или (4.7) для полиномов $R_n(x)$.

6. Определение оптимальных значений параметров.

Этот этап является основным. Необходимо определить значения внутренних параметров объекта, обеспечивающие идентичность функции погрешности выбранному полиному Чебышева. Данная задача решается приближенными методами, при этом в зависимости от требуемой точности и сложности объекта можно воспользоваться различными подходами.

Первый подход основывается на принятии положения, что два многочлена степени n считаются равными, если равны их коэффициенты при аргументах в соответствующих степенях. Этот подход является наиболее достоверным, но и более трудоемким.

Алгоритм реализации этого подхода заключается в следующем:

– аналитическое выражение для погрешности приближения раскладывают в ряд по степеням аргумента;

– приравнивают числовые коэффициенты полиномов Чебышева (табличные данные) коэффициентам ряда (с буквенными обозначениями параметров) при x в соответствующих степенях, получают систему n уравнений;

– решают полученную систему n уравнений относительно неизвестных параметров q_s .

Максимальное число неизвестных параметров q_s (N), которые можно найти, решая систему уравнений, равно степени полинома n . На самом деле число внутренних параметров N может отличаться от n . Если $N < n$, то берут не все коэффициенты, а лишь N коэффициентов при больших степенях аргумента. Если $N > n$, то ряд параметров q_s выбирают из конструктивных соображений, оставляя в качестве неизвестных не более n параметров.

Реализация рассматриваемого подхода требует разложения в ряд функции погрешности, что часто является достаточно сложной задачей.

Второй подход является более простым, хотя и менее точным. В его основу положено предположение, что два многочлена степени n считаются равными, если равны их корни.

Алгоритм реализации этого подхода заключается в следующем:

- из таблиц для выбранного типа полинома с учетом n определяют корни полинома Чебышева;

- подставляют значения корней в функцию погрешности и приравнивают ее к нулю, получая таким образом систему n уравнений с n неизвестными (число уравнений может быть меньше n , если требуется определить меньшее количество неизвестных параметров q_s);

- решают полученную систему относительно неизвестных параметров q_s .

Существует еще более простой *третий подход*, позволяющий получить удовлетворительные результаты для сравнительно простых измерительных устройств с нелинейными характеристиками. В основу положено разложение функции погрешности в ряд (также как и в первом варианте) и приравнивание нулю коэффициентов при аргументах в степени, большей 1.

Алгоритм реализации подхода следующий:

- аналитическое выражение для погрешности приближения раскладывают в ряд по степеням аргумента (для простых функций в литературе имеются таблицы разложения, например в [9]);

- коэффициенты при аргументах в степенях, больших 1, приравнивают 0, получают систему N уравнений;

- решают систему относительно N неизвестных внутренних параметров.

7. *Определение максимального значения погрешности приближения, проверка эффективности синтеза.*

Максимальное значение погрешности $\Delta y_{cx \max}$ определяется из полученного аналитического выражения для Δy_{cx} и найденных оптимальных значений внутренних параметров путем вычисления значения погрешности в точках, соответствующих точкам наибольшего отклонения полиномов x' ; (см.: табл. 4.1, 4.2, 4.3).

Следует отметить, что представление функции погрешности в виде полинома Чебышева является приближенным. Поэтому для более точного определения максимального значения погрешности приближения следует, исследовав полученную функцию погрешности на экстремум, уточнить значения x' . При наличии вычислительной техники можно также определить максимальное значение погрешности, построив ее функцию во всем диапазоне преобразования с заданным шагом аргумента.

Точностной синтез считается законченным при выполнении условия:

$$\Delta y_{\text{сх max}} \leq |\Delta y_{\text{сх}}|.$$

Если условие не выполняется, то берут следующее более высокое значение степени полинома Чебышева и проводят уточняющий расчет.

4.3.4 Примеры синтеза

Пример 1. Синусный рычажно-зубчатый индикатор.

Определить оптимальное значение длины рычага q прибора (рис. 4.1) при следующих исходных данных: $a = -0,4$ мм; $b = 0,4$ мм; $C = 0,01$ мм; $Z_{\text{шк}} = 80$; $\Theta_{\text{шк}} = 2\pi/3$.

1. Согласно формуле (4.2) аналитическое выражение для погрешности приближения имеет вид:

$$y_{\text{сх}} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \arcsin \frac{x}{q} - x.$$

2. Допускаемое значение погрешности приближения определим согласно (4.8):

$$|\Delta y_{\text{сх}}| \approx 0,1 |\Delta y| = 0,1 C = 0,001 \text{ мм}.$$

3. Анализируя схему прибора и принимая во внимание относительный характер измерения и симметричность диапазона, воспользуемся для синтеза полиномом Чебышева типа $P_n(x)$.

4. Степень полинома примем равной $n = 3$.

5. Произведем замену переменной согласно выражению (4.6):

$$t = (2x - a - b)/(b - a) = [2x - (-0,4) - 0,4]/[0,4 - (-0,4)] = 2x/0,8 = x/0,4.$$

6. Определим оптимальные значения параметров.

Из конструктивных соображений примем $Z_1/Z_2 = 10$ и определим оптимальное значение длины рычага q . Воспользуемся вторым из рас-

смотренных подходов, в основу которого положено применение корневой полинома.

Из табл. 4.1 определим корень полинома третьей степени (неизвестный параметр один, поэтому используется только один корень). Из трех корней 0 не может использоваться, поскольку полином $P_n(x)$ при нулевом аргументе независимо от q всегда обращается в 0. Воспользуемся значением $x_k = 0,866$.

Подставим корень в функцию погрешности и приравняем ее к нулю:

$$\Delta y_{cx} = \frac{80 \cdot 0,01 \cdot 3}{2\pi} \cdot 10 \arcsin\left(\frac{0,4 \cdot 0,866}{q}\right) - 0,4 \cdot 0,866 = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно q , определим оптимальное значение q_{opt1} :

$$\arcsin \frac{0,4 \cdot 0,866}{q} = \frac{0,4 \cdot 0,866 \cdot 2\pi}{80 \cdot 0,01 \cdot 3 \cdot 10} = 0,09069;$$

$$q_{opt1} = 3,8248 \text{ мм.}$$

7. Определим максимальное значение погрешности при найденном значении q , выберем $x'_i = 1$:

$$\Delta y_{cx \max} = \frac{80 \cdot 0,01 \cdot 3}{2\pi} \cdot 10 \arcsin\left(\frac{0,4 \cdot 1}{3,8248}\right) - 0,4 \cdot 1 = 0,20 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

Поскольку $\Delta y_{cx \max} < |\Delta y_{cx}|$, расчет можно считать законченным.

Аналогичные расчеты, выполненные для полинома второй степени, дают результат $q_{opt2} = 3,8232 \text{ мм}$, при этом максимальное значение погрешности $0,37 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$, что также является вполне удовлетворительным результатом.

Пример 2. Линейный потенциометр.

При проектировании линейного потенциометра (рис. 4.3) необходимо определить значение его сопротивления R при следующих исходных данных: $U_{вх} = 50 \text{ мВ}$; $r = 100 \text{ Ом}$; $R_n = 10 \text{ кОм}$.

Согласно заданной характеристике выходное напряжение преобразователя независимо от значения R будет изменяться от 0 при $R_x = 0$ до $U_{вх}$ при $R_x = R$. Таким образом, значение R следует выбирать из ус-

ловия согласования сопротивления потенциометра с сопротивлениями источника сигнала r и нагрузки R_n и обеспечения минимума погрешности от нелинейности характеристики проектируемого преобразователя.

Анализ схемы, расчетной характеристики и аналитического выражения для функции погрешности приближения (4.3) показывают, что:

- для снижения погрешности приближения значение R , с одной стороны, должно быть много больше r , а с другой – много меньше R_n , поэтому оптимальное значение R лежит в диапазоне $r < R < R_n$;

- при любых значениях сопротивления функция погрешности во всем диапазоне преобразования отрицательна, следовательно применение полиномов Чебышева не возможно (необходимо использовать численный метод).

Изменяя R в указанном диапазоне с шагом 1 Ом и рассчитывая по соответствующей программе на ЭВМ максимум погрешности приближения $\Delta U_{\text{сх макс}}$ для каждого значения сопротивления, определили оптимальное значение $R_{\text{опт}} = 2,412 \text{ кОм}$.

В качестве иллюстрации на рис. 4.6 представлены графики функций погрешности для случаев: $R = r = 100 \text{ Ом}$; $R = R_n = 10 \text{ кОм}$, $R = \sqrt{rR_n} = 1 \text{ кОм}$ и $R = R_{\text{опт}} = 2,412 \text{ кОм}$. Сравнение полученных результатов показывает эффективность предложенного метода (оптимальное значение R обеспечивает снижение погрешности приближения, максимальное приведенное значение которой составляет лишь 5%).

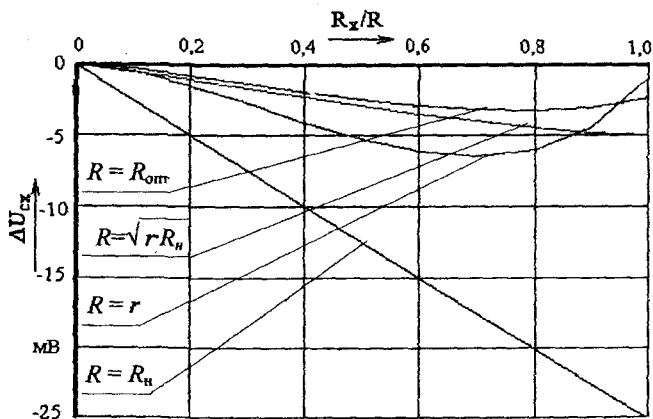


Рис. 4.6. Функции погрешности приближения для различных значений R

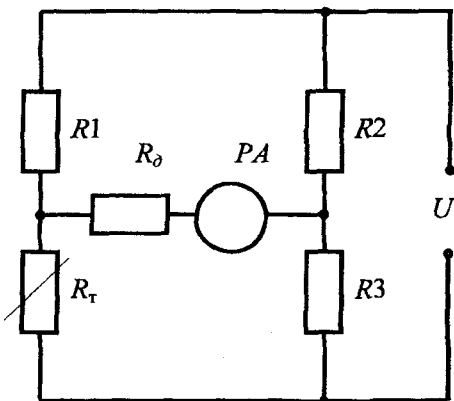


Рис. 4.7. Схема термометра

Пример 3. Электрический термометр.

При проектировании термисторного термометра [6] согласно схеме, представленной на рис. 4.7, необходимо определить параметры измерительной цепи, обеспечивающие минимальную погрешность приближения при работе прибора в диапазоне $T \in [20; 70]^\circ\text{C}$.

Из анализа априорной информации и принципиальной схемы прибора устанавливаем, что он включает в себя последовательно соединенные три преобразователя: полупроводниковый термометр сопротивления (термистор), преобразующий температуру T в сопротивление R_T ; неуравновешенный измерительный мост, преобразующий R_T в силу тока I в измерительной диагонали; микроамперметр PA , отградуированный в единицах температуры и имеющий равномерную шкалу (заданная характеристика линейна).

1. Согласно приведенному выше алгоритму определим расчетную характеристику прибора и аналитическое выражение для погрешности приближения. Для этого составим характеристики преобразователей.

Для термистора согласно справочным данным имеем:

$$R_T = R_0 \exp[B/T], \quad (4.10)$$

где R_0 и B – внутренние параметры преобразователя.

Характеристика термистора, таким образом, существенно нелинейная. Ее график для выбранных в качестве примера значений параметров ($B = 80$; $R_0 = 3000 \text{ Ом}$) представлен на рис. 4.8.

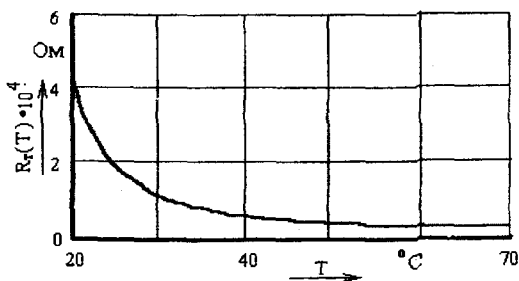


Рис. 4.8. Статическая характеристика термистора

Для представленной на рис. 4.7 мостовой схемы функция преобразования имеет вид:

$$I = U \frac{R_T R_2 - R_1 R_3}{R_0 (R_T + R_1)(R_3 + R_2) + R_T R_1 (R_3 + R_2) + R_3 R_2 (R_T + R_1)}. \quad (4.11)$$

Видно, что характеристика моста также существенно нелинейная.

Следовательно, расчетная характеристика прибора, получаемая путем подстановки (4.10) в (4.11), является нелинейной (используются два нелинейных преобразователя с различными видами функций преобразования), а заданная характеристика – линейная, т.е. имеет место погрешность приближения.

Определим значения параметров измерительной схемы (R_1 , R_2 , R_3 , R_0 , U), обеспечивающие минимальное значение погрешности приближения.

С учетом (4.9) и (4.11) выражение для погрешности имеет вид:

$$\Delta I_{\text{ок}} = U \frac{R_T R_2 - R_1 R_3}{R_0 (R_T + R_1)(R_3 + R_2) + R_T R_1 (R_3 + R_2) + R_3 R_2 (R_T + R_1)} - k(T - T_n),$$

где T_n – нижний предел измерения;

$k = 1 \text{ мкА}/^\circ\text{C}$ – масштабный коэффициент.

2. Принимая во внимание, что ноль находится в начале шкалы, воспользуемся для синтеза полиномом Чебышева типа $R_n(x)$.

3. Примем $n = 3$. Корни: $x_{k1} = 0$; $x_{k2} = 0,4641$; $x_{k3} = 0,9282$.

4. Произведем замену переменной и перейдем к диапазону $[0; +1]$.
С учетом исходных данных ($T_H = 20^\circ\text{C}$, $T_B = 70^\circ\text{C}$) получим:

$$T_1 = T_H = 20^\circ\text{C};$$

$$T_2 = 0,4641(T_B - T_H) + T_H = 43,205^\circ\text{C};$$

$$T_3 = 0,9282(T_B - T_H) + T_H = 66,41^\circ\text{C}.$$

Приведенным выше значениям T_1 , T_2 и T_3 соответствуют значения:
 $R_{T1} = 4,318 \cdot 10^4 \text{ Ом}$, $R_{T2} = 5,038 \cdot 10^3 \text{ Ом}$, $R_{T3} = 2,638 \cdot 10^3 \text{ Ом}$.

5. Составим систему трех уравнений, подставляя найденные значения R_{T_i} в выражение для погрешности приближения и приравнивая его нулю:

$$\begin{cases} U \frac{R_{T1}R_2 - R_1R_3}{R_0(R_{T1} + R_1)(R_3 + R_2) + R_{T1}R_1(R_3 + R_2) + R_3R_2(R_{T1} + R_1)} = k(T_1 - T_H); \\ U \frac{R_{T2}R_2 - R_1R_3}{R_0(R_{T2} + R_1)(R_3 + R_2) + R_{T2}R_1(R_3 + R_2) + R_3R_2(R_{T2} + R_1)} = k(T_2 - T_H); \\ U \frac{R_{T3}R_2 - R_1R_3}{R_0(R_{T3} + R_1)(R_3 + R_2) + R_{T3}R_1(R_3 + R_2) + R_3R_2(R_{T3} + R_1)} = k(T_3 - T_H). \end{cases}$$

6. Определим значения параметров. Решением полученной системы можно найти только три неизвестных параметра. Из конструктивных соображений принимаем $R_1 = R_2$, а сопротивление в диагонали моста с учетом добавочного резистора и характеристик микроамперметра $R_0 = 1000 \text{ Ом}$.

Из первого уравнения системы получим $R_3 = R_{T1}$.

Решением системы из оставшихся двух уравнений определим неизвестные параметры R_1 , R_2 и U :

$$R_1 = R_2 = 91,44 \text{ Ом}; \quad U = -1,74 \text{ В}.$$

7. Определим функцию погрешности приближения. Расчетная зависимость $\Delta I_{\text{сх}}(T)$ имеет вид, представленный на рис. 4.9. Анализ полученной кривой показывает, что с учетом знака она соответствует графику зависимости полинома Чебышева $R_n(x)$ третьей степени (рис. 4.7). При этом максимальные значения погрешности соответствуют координатам точек наибольшего отклонения x'_i полинома и не превышают $1,4 \text{ мкА}$.

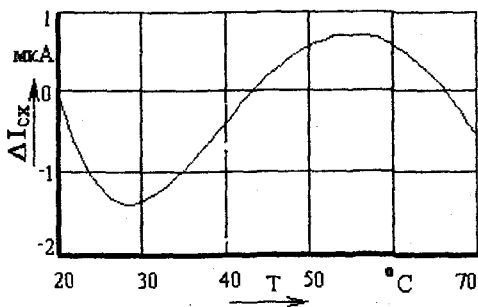


Рис. 4.9. Зависимость погрешности от температуры

Таким образом, даже для такой сложной характеристики прибора при существенной нелинейности используемых преобразователей рассматриваемый метод синтеза параметров весьма эффективен.

5. ПОГРЕШНОСТИ ОТ НЕСООТВЕТСТВИЯ ПАРАМЕТРОВ НОМИНАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ

5.1 Общие понятия и подходы к расчету

При проектировании измерительных устройств наряду с номинальными значениями обязательно оговариваются и допускаемые отклонения на все размеры и параметры деталей и элементов. При этом конструктор должен четко понимать, что действительные значения параметров будут отличаться от номинальных и, следовательно, реальная функция будет отличаться от номинальной расчетной, что приведет к погрешности.

Обычно в технической документации на объект проектированы оговариваются десятки, сотни, а иногда и тысячи параметров. При этом не все из них оказывают влияние на функцию преобразования.

Поэтому *первый этап* расчета погрешности от несоответствия параметров номинальным значениям заключается в выявлении технических параметров, неточность выполнения которых приводит к изменению функции преобразования. Именно эти параметры классифицируются как внутренние и учитываются при расчетах на точность. При этом каждую отдельную неточность внутреннего параметра, приводящую к погрешности измерительного устройства, называют *первичной погрешностью*. Будучи отклонением внутреннего параметра, первичная погрешность имеет его размерность.

К числу внутренних относят также параметры, номинальные значения которых равны нулю, и этих параметров нет в расчетной характеристике (зазоры, отклонения от правильной геометрической формы и расположения поверхностей, шероховатость, электрические шумы и т.п.).

Влияние первичных погрешностей может быть разноплановым. Одни из них ведут к увеличению выходного сигнала, другие – к его уменьшению, поэтому итог влияния совокупности первичных погрешностей определяется реальной комбинацией их значений и видом функции преобразования.

Часть суммарной погрешности измерительного устройства, обусловленная первичной погрешностью, называется *частной* или *частичной погрешностью*. Частная погрешность, будучи результатом влияния первичной погрешности на точность объекта, имеет размерность выходного сигнала (измеряемой величины). Суммарная по-

погрешность от несоответствия параметров номинальным значениям определяется совокупностью частных погрешностей.

Схематично определение погрешности от несоответствия параметров номинальным значениям можно представить рис. 5.1:

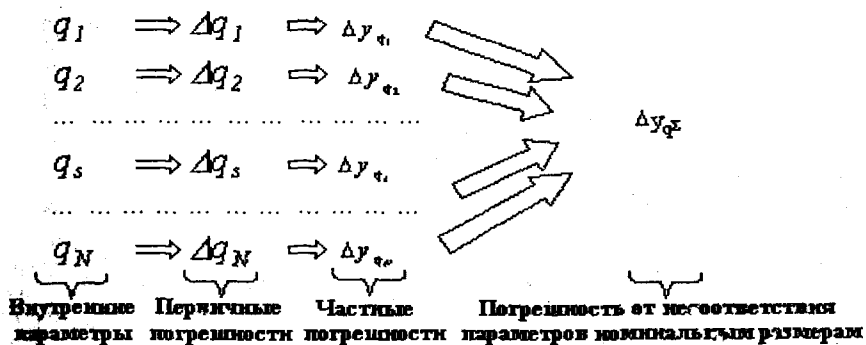


Рис. 5.1. Схема формирования погрешности от несоответствия параметров номинальным значениям

Таким образом, алгоритм определения погрешности от несоответствия параметров номинальным значениям включает следующие этапы:

- анализ конструкторской документации на объект (схемы, чертежи и т.п.), выявление внутренних параметров, составление математического описания объекта;
- анализ первичных погрешностей, определение их вида, характера изменения, численных значений, математическое описание первичных погрешностей;
- расчет частных погрешностей в зависимости от вида первичных;
- определение суммарной погрешности по совокупности частных.

5.2 Первичные погрешности

Первый этап анализа погрешности от несоответствия параметров номинальным значениям заключается в составлении *перечня первичных погрешностей*, подлежащих учету при проведении анализа.

В соответствии с обобщенной структурой прибора (рис. 1.1) можно выделить первичные погрешности на различных уровнях: на уровне узлов и блоков, отдельных деталей и элементов, рабочих поверхностей деталей и свойств элементов. Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять первичные погрешности.

1. *Соблюдение принципа координирования.* Отсчет всех погрешностей необходимо выполнять в единой системе координат. При рассмотрении элементов на различных ступенях деления измерительного устройства для отсчета погрешностей могут применяться вспомогательные системы координат, которые обязательно увязываются с основной. Этим обеспечивается полный охват погрешностей и возможность описания в математической форме влияния первичных погрешностей на выходной сигнал.

2. *Соблюдение принципа независимости влияния первичных погрешностей.* Погрешности следует задавать таким образом, чтобы влияние одной погрешности можно было определить, полагая, что все остальные первичные погрешности отсутствуют (одна погрешность не входит в другую). Если происходит отступление от данного принципа, то в дальнейшем потребуются сложный математический аппарат по учету взаимной связи первичных погрешностей.

3. *Соблюдение принципа однозначности.* Каждый параметр, погрешность которого анализируется, должен быть представлен такими существенными и неизменными признаками, чтобы его теоретическое значение являлось бы единственным. Отступление от данного принципа приводит к неопределенности представления об измеряемой величине и параметре, к потере смысла анализа точности.

Наряду с первичными погрешностями для механизмов рассматривают *действующие погрешности* – погрешности рабочих поверхностей кинематических пар, характеризующие отклонения их формы и шероховатость. Для упрощения дальнейшего изложения отнесем действующие погрешности к классу первичных и не будем выделять их в отдельную группу.

Следует отметить, что точность анализа во многом зависит от полноты и правильности задания первичных и действующих погрешностей. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Цилиндрическая деталь (рис. 5.2).

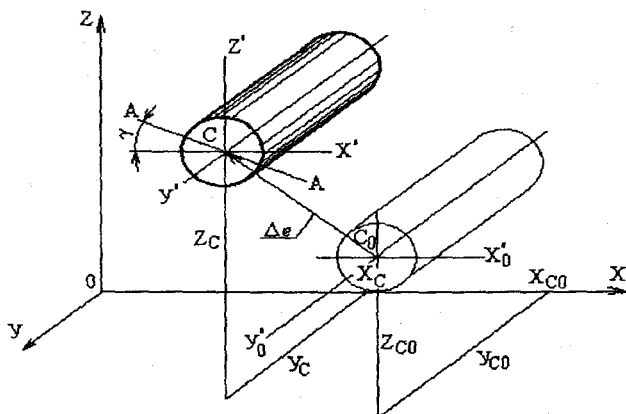


Рис. 5.2. Координаты положения цилиндрической детали

Представителем детали является точка C , ее положение задано в относящейся к прибору системе координат $Oxyz$. Вспомогательная система координат $Cx'y'z'$ может не совпадать с заданным точным положением системы $C_0x_0y_0z_0$. Для цилиндра смещение точки C вдоль оси Sy' не имеет значения, поэтому его не учитывают. Смещение по двум другим осям приводит к первичным погрешностям Δx_C и Δz_C . Оно соответствует поступательному, параллельному себе смещению оси Sy' и выражается в форме эксцентриситета оси:

$$\Delta e = \sqrt{\Delta x_C^2 + \Delta z_C^2}.$$

Эксцентриситет является векторной погрешностью с модулем, равным расстоянию $C_0C = \Delta e$. Направление вектора определяется углом Ψ_e .

Поворот действительных осей вспомогательной системы координат выражается в виде перекоса оси цилиндра Δy . Кроме того, учитывается погрешность радиуса Δr , которая учитывается либо как постоянная величина (если пренебрегают погрешностями отклонения формы), либо как функцию координат $\Delta r(x'y'z')$ вспомогательной системы.

Таким образом, при анализе необходимо учитывать две векторные Δe и Δy и одну скалярную Δr погрешности.

Пример 2. Синусный механизм.

Рассмотрим первичный преобразователь прибора, представленного на рис. 4.1а. К числу первичных погрешностей следует отнести, прежде всего, погрешность длины рычага Δq и погрешность его начального положения α , перекос площадки толкателя β и отклонение формы его поверхности (отклонение от плоскостности) $\Delta\Phi$.

Характер влияния данных погрешностей поясняется рис. 5.3 и 5.4.

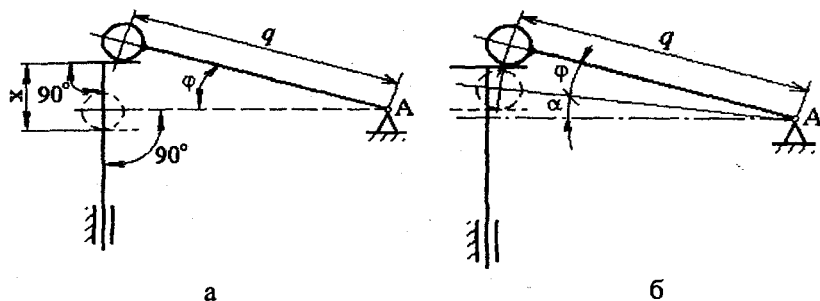


Рис. 5.3. Расчетные схемы синусного механизма при отсутствии погрешности (а) и при наличии погрешности начального положения рычага (б)

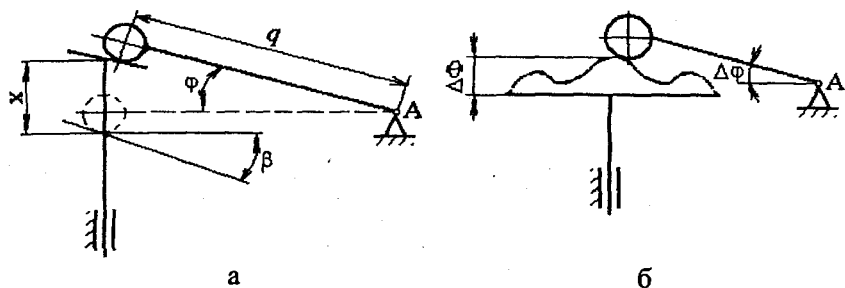


Рис. 5.4. Первичные погрешности синусного механизма: а – перекос площадки толкателя; б – погрешность формы

Пример 3. Спусковой регулятор с системой баланс-спираль.

Анализ схемы регулятора (рис. 5.5) показывает, что к числу первичных погрешностей на данном уровне необходимо отнести погрешность момента инерции баланса ΔI_G и погрешности параметров и размеров упругого элемента (волоска): погрешность длины ΔL , ширины Δb , толщины Δh , модуля упругости материала ΔE .

Вторым этапом анализа погрешности от несоответствия параметров номинальным значениям является **анализ и математическое описание первичных погрешностей**.

Первичные погрешности могут быть различных видов. Прежде всего, следует выделить погрешности *детерминированные и случайные*. В первом случае характеристики погрешности известны, во втором – они изменяются случайным образом.

Если погрешность определяется только численным значением, то это *скалярная* погрешность. Она характеризуется одним параметром (погрешность сопротивления резистора, длины рычага, модуля упругости чувствительного элемента и т.п.).

Погрешность, характеризуемая не только значением, но и направлением действия, называется *векторной* (эксцентриситет шкалы отсчетного устройства, вращающихся деталей – зубчатых колес, кулачков, роликов во фрикционных передачах и т.п.) Для задания такой погрешности, как и для любого вектора, необходимо, как минимум, два параметра. Например, модуль и аргумент (значение погрешности и направление ее действия) либо две координаты.

Таким образом, возможны четыре комбинации свойств первичной погрешности (рис. 5.6).

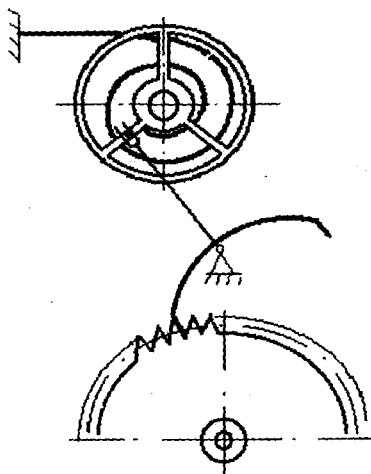


Рис. 5.5. Схема спускового регулятора

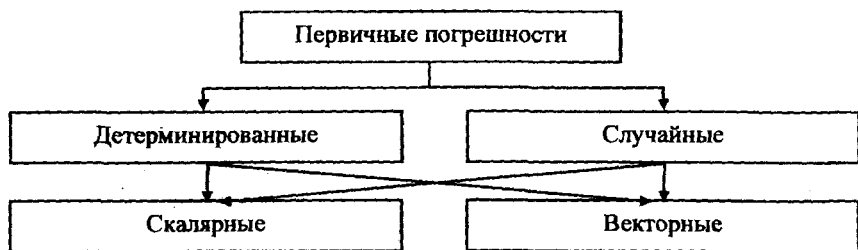


Рис. 5.6. Классификация первичных погрешностей

При анализе первичных погрешностей необходимо прежде всего классифицировать их по указанным признакам и составить их математическое описание.

Для детерминированной скалярной погрешности указывается ее значение Δq_s , с учетом знака. Для детерминированной векторной погрешности указываются характеризующие ее параметры, например, модуль погрешности $|\Delta q_s|$ и ее аргумент $\varphi_{\Delta q_s}$. Для случайной скалярной погрешности следует задаться видом закона распределения ее вероятности с указанием основных моментов: математического ожидания $M(\Delta q_s)$ и среднего квадратического отклонения $S(\Delta q_s)$.

Гораздо сложнее обстоит дело с описанием случайных векторных погрешностей, для которых необходимо определиться с видами законов распределения вероятности их модуля (значения) и аргумента (направления действия) с указанием соответствующих точечных характеристик $M(|\Delta q_s|)$, $S(|\Delta q_s|)$, $M(\varphi_{\Delta q_s})$, $S(\varphi_{\Delta q_s})$.

5.3. Методы определения частных погрешностей

5.3.1 Аналитический метод

Существует несколько методов расчета частных погрешностей. Выбор того или иного метода определяется характеристиками первичных погрешностей, схемой измерительного устройства, его расчетной характеристикой. Одним из наиболее распространенных мето-

дов является *аналитический метод*, который называют еще *дифференциальным*.

Рассмотрим случай определения частных погрешностей для детерминированной скалярной первичной погрешности (Δq_s – известная величина).

Номинальная расчетная характеристика прибора имеет вид:

$$y_{\text{нр}} = f(x, q_s). \quad (5.1)$$

Пусть параметр q_s имеет первичную погрешность $\Delta q_s \ll q_s$, а остальные параметры погрешности не имеют. Тогда расчетную функцию преобразования можно записать в виде:

$$y_p = f(x, q_s + \Delta q_s). \quad (5.2)$$

Принимая во внимание, что Δq_s много меньше q_s , разложим функцию (5.2) в ряд Тейлора по степеням Δq_s :

$$f(x, q_s + \Delta q_s) = f(x, q_s) + \left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\right)_0 \Delta q_s + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 q_s}\right)_0 \Delta q_s^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial^3 q_s}\right)_0 \Delta q_s^3 + \dots \quad (5.3)$$

Символ «0» означает, что при взятии частных производных значения всех параметров принимаются равными номинальным значениям (без учета первичных погрешностей).

Анализируя выражение (5.3), можно отметить, что второй член существенно больше третьего, а третий больше четвертого. Пренебрегая величинами второго и больших порядков малости, получим:

$$y_p(x) = f(x, q_s + \Delta q_s) = f(x, q_s) + \left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\right)_0 \Delta q_s. \quad (5.4)$$

Частная погрешность – это результат влияния первичной погрешности, поэтому выражение для определения частной погрешности будет иметь вид:

$$\Delta y_{q_s} = y_p(x) - y_{\text{нр}}(x). \quad (5.5)$$

Подставляя (5.1) и (5.4) в (5.5), получим:

$$\Delta y_{q_s} = \left(\frac{\partial y}{\partial q_s} \right)_0 \cdot \Delta q_s. \quad (5.6)$$

Выражение (5.6) является *основной формулой линейной теории точности*, а значение $\partial y / \partial q_s$ называют *коэффициентом влияния*.

Таким образом, для нахождения частной погрешности необходимо детерминированную скалярную первичную погрешность умножить на коэффициент влияния.

Аналитический метод определения частных погрешностей является наиболее эффективным, удобным и рекомендуется к применению. Однако его использование не всегда возможно.

Ограничение 1: первичная погрешность должна быть много меньше (как минимум на порядок) номинального значения параметра, поскольку данный метод является приближенным, и степень точности приближения возрастает с уменьшением отношения Δq_s к q_s .

Ограничение 2: метод не может быть применен в случае нулевых номинальных значений параметра, поскольку тогда значение параметра отсутствует в расчетной характеристике, и частную производную взять нельзя.

Ограничение 3: при сложных функциях преобразования может быть затруднительным взятие частных производных.

Ограничение 4: метод может быть использован в рассмотренном виде только для независимых первичных погрешностей.

Пример 1. Спусковой регулятор.

Определить суточный ход часов с системой спускового регулятора типа баланс-волосок (рис. 5.5) от неточности исполнения длины волоска. При номинальном значении $L = 170$ мм и $\Delta L = 0,1$ мм.

1. Составим математическое описание спускового регулятора.

Период колебания спускового регулятора определяется выражением:

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{12LI_6}{Ebh^3}}, \quad (5.7)$$

где I_6 – момент инерции баланса;

E – модуль упругости волоска;

b и h – соответственно, ширина и толщина волоска при его длине L .

Номинальные значения параметров подобраны таким образом, что период колебания $T_p = 0,4$ с.

2. Проанализируем первичную погрешность.

Первичная погрешность ΔL – скалярная величина, значение ее задано, следовательно, это детерминированная погрешность.

3. Определим коэффициент влияния:

$$\frac{\partial T}{\partial L} = \frac{2\pi \frac{12I_6}{Ebh^3}}{2\sqrt{\frac{12LI_6}{Ebh^3}}} = \pi \frac{1}{L} \sqrt{\frac{12LI_6}{Ebh^3}} = \frac{1}{2L} 2\pi \sqrt{\frac{12LI_6}{Ebh^3}} = \frac{T_p}{2L}. \quad (5.8)$$

4. Определим частную погрешность периода колебаний спускового регулятора от действия первичной погрешности ΔL . Воспользуемся формулой (5.6) с учетом (5.8):

$$\Delta T_L = \left(\frac{\partial T}{\partial L} \right)_0 \Delta L = T_p \cdot \frac{\Delta L}{2L}. \quad (5.9)$$

Подставим численные значения в (5.9):

$$\Delta T_L = 0,4 \cdot \frac{0,1}{2 \cdot 170} = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Для часов мерой погрешности является суточный ход:

$$\Delta T_{\text{сут}} = \frac{60 \cdot 60 \cdot 24}{T_p} \cdot \Delta T_L = \frac{60 \cdot 60 \cdot 24}{0,4} \cdot 1,18 \cdot 10^{-4} = 25,5 \text{ с.}$$

Отметим, что незначительная погрешность длины волоска (относительная погрешность $\Delta L/L = 0,0006$) приводит к существенной погрешности суточного хода.

Пример 2. Синусный рычажно-зубчатый механизм.

Определим частные погрешности синусного измерительного механизма (рис. 4.1) при исходных данных примера 1 п. 4.3.4, входном воздействии $x = 0,4$ мм и значениях первичных погрешностей: погрешность длины рычага $\Delta q = 0,001$ мм; погрешность начального положения рычага $\alpha = 1^\circ = 0,0175$ рад; перекос площадки толкателя

$\beta = -0,0175 \text{ рад}$; отклонение формы его поверхности (отклонение от плоскостности) $\Delta\Phi = 0,001 \text{ мм}$.

1. Составим математическое описание механизма. С учетом данных п. 4.1 выражение для расчетной характеристики прибора имеет вид:

$$y_{\text{расч}} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \arcsin \frac{x}{q} = \frac{80 \cdot 0,01 \cdot 3}{2 \cdot \pi} \cdot 10 \cdot \arcsin \frac{x}{3,8248} = 3,8197 \cdot \arcsin \frac{x}{3,8248}$$

2. Анализ первичных погрешностей показывает, что все они заданы как детерминированные и скалярные.

3. Определим частную погрешность Δy_q :

$$\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \left[-\frac{x}{q^2 \sqrt{1-(x/q)^2}} \right] = 3,8197 \cdot \left[-\frac{0,4}{3,8248^2 \cdot \sqrt{1-(0,4/3,8248)^2}} \right] = -0,105;$$

$$\Delta y_q = (\partial y / \partial q) \Delta q = -0,105 \cdot 0,001 = -0,0001 \text{ мм}.$$

4. Определим частную погрешность Δy_ϕ .

Влияние погрешности $\Delta\Phi$ на y аналогично влиянию погрешности входного воздействия x . Коэффициент влияния можно рассчитать из выражения:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \left[\frac{1}{q \sqrt{1-(x/q)^2}} \right] = 3,8197 \cdot \left[\frac{1}{3,8248 \sqrt{1-(0,4/3,8248)^2}} \right] = 0,402;$$

$$\Delta y_\phi = (\partial y / \partial x) \Delta\Phi = 0,402 \cdot 0,001 = 0,0004 \text{ мм}.$$

5. Определим частную погрешность Δy_α .

Номинальное значение угла начального положения рычага равно 0, поэтому данного параметра нет в функции преобразования. Определение частной погрешности, таким образом, требует либо усложнения расчетной характеристики и введения туда этого параметра, либо применения другого метода расчета.

С учетом представленной на рис. 5.3б схемы нетрудно показать, что усовершенствованная функция преобразования имеет вид:

$$y_{\text{расч}} = \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \left[\arcsin\left(\frac{x}{q} + \sin \alpha\right) - \alpha \right] = 3,8197 \cdot \left[\arcsin\left(\frac{x}{3,8248} + \sin \alpha\right) - \alpha \right].$$

Тогда выражение для частной погрешности принимает вид:

$$\begin{aligned} \Delta y_{\phi} &= \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - (x/q + \sin \alpha)^2}} - 1 \right] \cdot \alpha = \\ &= 3,8197 \cdot \left[\frac{\cos 0,0175}{\sqrt{1 - (0,4/3,8248 + \sin 0,0175)^2}} - 1 \right] \cdot 0,0175 = 0,0005 \text{ мм.} \end{aligned}$$

6. Определим частную погрешность Δy_{β} .

Аналогично рассмотренной выше первичной погрешности учет β требует усовершенствования расчетной характеристики, при этом частная погрешность определится из выражения:

$$\begin{aligned} \Delta y_{\phi} &= \frac{Z_{\text{шк}} \cdot C}{\Theta_{\text{шк}}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \left[1 - \frac{(x/q) \sin \beta + \cos \beta}{\sqrt{1 - [(x \cos \beta)/q - \sin \beta]^2}} \right] \cdot \beta = \\ &= 3,8197 \cdot \left[1 - \frac{(0,4/3,8248) \sin 0,0175 + \cos 0,0175}{\sqrt{1 - [(0,4 \cos 0,0175)/3,8248 - \sin 0,0175]^2}} \right] \cdot 0,0175 = -0,0004 \text{ мм.} \end{aligned}$$

5.3.2 Метод преобразованных схем

В преобразованной схеме прибора первичная погрешность моделируется с помощью дополнительных звеньев в схеме механизма или дополнительных генераторов в электрической цепи. При этом требуемое значение частной погрешности определяют как функцию выходного сигнала при неизменном входном сигнале путем моделирования первичной погрешности.

Алгоритм метода преобразованных схем для механизмов:

- заменяют исследуемое звено q , на группу звеньев так, чтобы погрешность Δq , можно было бы изменять;
- закрепляют ведущее звено в одном заданном положении;
- строят в масштабе план малых перемещений для преобразованного механизма;

– по плану определяют выражение и значение частной погрешности Δy_{q_1} .

Для преобразования схем используют элементы широко применяемых кинематических пар: кулисы, обычные и сдвоенные ползуны и т.п.

Пример. Кривошипно-ползунный механизм.

Определим погрешность механизма Δy_{q_1} , вызванную смещением Δq_1 направляющих ползуна нормально к оси OY (рис. 5.7). Для рассматриваемого механизма входным воздействием является α (угол поворота), выходным – перемещение ползуна y .

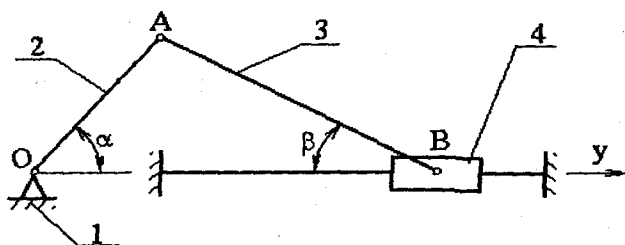


Рис. 5.7. Схема кривошипно-ползунный механизма

По данным справочной литературы функция преобразования данного механизма имеет вид:

$$y = q_2 \cos \alpha + \sqrt{q_3^2 - (q_2 \sin \alpha)^2},$$

где q_2 – длина кривошипа OA ;

q_3 – длина шатуна AB .

Номинальное значение параметра $q_1 = 0$, поэтому его нет в функции преобразования, и применить аналитический метод невозможно.

Вспользуемся методом преобразованных схем.

1. Преобразуем схему таким образом, чтобы можно было моделировать исследуемую первичную погрешность Δq_1 . Для обеспечения возможности перемещения направляющих ползуна нормально с оси OY вводим кулису (рис. 5.8).

2. Закрепляем ведущее звено – кривошип.

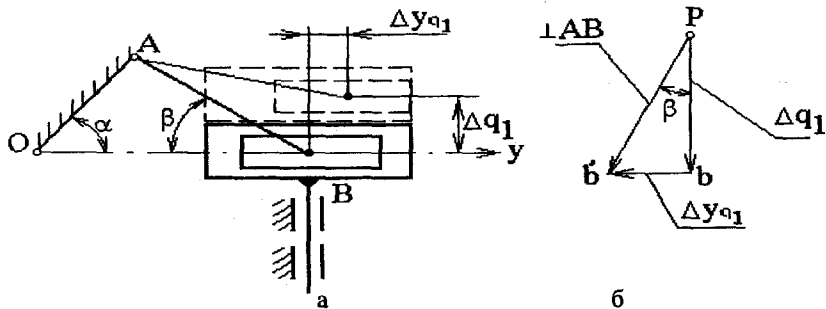


Рис. 5.8. Преобразованный механизм (а) и план малых перемещений (б)

3. Определяем частную погрешность, как перемещение ползуна, вызванное изменением Δq_1 при неподвижном кривошипе. Для этого строим план перемещений:

- из полюса p перпендикулярно оси Oy откладываем первичную погрешность Δq_1 в виде отрезка в заданном масштабе (pb);
- из полюса p проводим прямую нормально к AB ;
- из точки b проводим прямую, параллельную Oy ;
- получаем точку пересечения прямых $-b'$;
- по величине отрезка bb' определяем частную погрешность Δy_{q_1} (с учетом принятого масштаба);
- из анализа треугольника $pb'b'$ определяем аналитическое выражение для частной погрешности Δy_{q_1} ($\angle b'pb = \angle \beta$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно можно записать, что $bb' = pb' \cdot \operatorname{tg} \beta$);

$$\Delta y_{q_1} = - \Delta q_1 \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Алгоритм метода преобразованных схем для электрических цепей

К первичным погрешностям электрических цепей относятся погрешности сопротивлений, силы тока, индуктивности, емкости и других параметров.

Представим электрическую цепь в виде блока с напряжением E на входе и напряжением U_{AB} на выходе. Выделим из блока исследуемый элемент, например сопротивление R_x с погрешностью ΔR_x (рис. 5.9а).

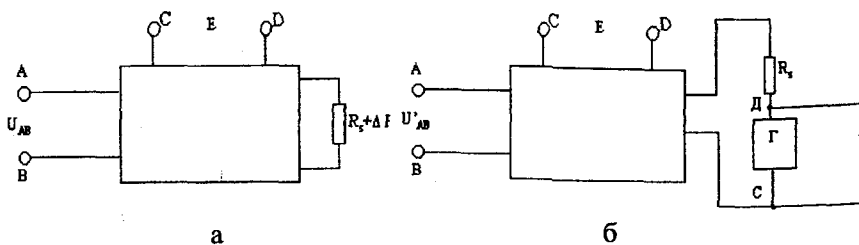


Рис. 5.9. Блок электрической цепи (а) и преобразованная схема (б)

Влияние этой погрешности на выходное напряжение определяется аналогично формуле линейной теории точности:

$$\Delta U_s = E \left(\frac{\partial f}{\partial R_s} \right) \Delta R_s, \quad (5.10)$$

где f – функция параметров электрической цепи.

Проблема заключается в определении коэффициента влияния первичной погрешности. При построении преобразованной электрической цепи (рис. 5.9б) моделируем первичную погрешность ΔR_s с помощью дополнительного генератора с ЭДС: $U_\Gamma = \mu \cdot \Delta e_s$, где μ – масштаб, с которым передается действительное падение напряжения, вызванное увеличением сопротивления R_s на ΔR_s , а Δe_s – падение напряжения на участке CD :

$$\Delta e_s = -(i_s + \Delta i_s) \cdot \Delta R_s \approx -i_s \Delta R_s;$$

$$U_\Gamma = -\mu \cdot i_s \cdot \Delta R_s.$$

Знак «–» означает, что дополнительный источник питания создает между полюсами C и D ток, противоположный основному току.

Закоротим полюса на входе цепи и включим дополнительный генератор. Тогда на выходе схемы возникает напряжение U'_{AB} , представляющее собой результат влияния первичной погрешности в масштабе μ , т.е. $U'_{AB} = \mu \cdot \Delta U_s$. Преобразовывая данное выражение, получим:

$$\Delta U_{\Gamma} = -\frac{U'_{AB}}{U_{\Gamma}} \cdot i_s \cdot \Delta R_s. \quad (5.11)$$

Сравнивая выражения (5.11) и (5.10), можно записать

$$E \left(\frac{df}{dR_s} \right) \cdot \Delta R_s = - \left(\frac{U'_{AB}}{U_{\Gamma}} \right) i_s \cdot \Delta R_s. \quad (5.12)$$

Следовательно, частная погрешность определяется из (5.10) с учетом (5.12):

$$\Delta U_s = E \cdot \Delta R_s \left(-\frac{i_s}{E} \cdot \frac{U'_{AB}}{U_{\Gamma}} \right). \quad (5.13)$$

В выражении (5.13) i_s/E определяют из заданной цепи, а U'_{AB}/U_{Γ} — из преобразованной цепи.

Пример. Делитель напряжения.

Определим погрешность выходного напряжения делителя (рис. 5.10а), вызванную первичной погрешностью сопротивления ΔR_1 .

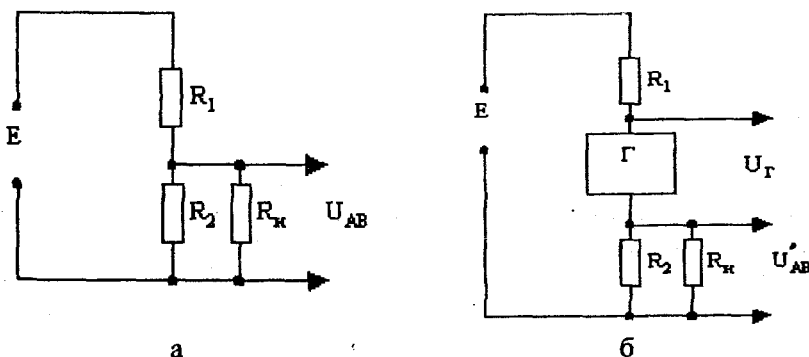


Рис. 5.10. Делитель напряжения (а) и преобразованная схема (б)

Для основной цепи из закона Ома следует

$$\frac{i_1}{E} = \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_n}{R_2 + R_n}} = \frac{R_2 + R_n}{R_1(R_2 + R_n) + R_2 \cdot R_n}$$

Напряжение на выходе преобразованной цепи (рис. 5.10б) определяется из уравнения Кирхгофа:

$$U'_{AB} = i_1 \cdot \frac{R_2 \cdot R_n}{R_2 + R_n}.$$

Напряжение генератора аналогично определяется из другого контура:

$$U_{\Gamma} = i_1 \cdot \left(R_1 + \frac{R_2 \cdot R_n}{R_2 + R_n} \right) = i_1 \frac{R_1(R_2 + R_n) + R_2 \cdot R_n}{R_2 + R_n}.$$

После подстановки полученных выражений в (5.13) и преобразования получим выражение для выходного напряжения (частной погрешности):

$$\Delta U_{\Gamma} = -E \cdot \Delta R_1 \frac{(R_2 + R_n) \cdot R_2 R_n}{[R_1(R_2 + R_n) + R_2 \cdot R_n]^2}.$$

5.3.3 Геометрический метод

В ряде случаев наиболее удобным к применению для механизмов является геометрический метод. Его суть заключается в том, что измерительный механизм строят в двух наложенных друг на друга положениях, причем первое положение строится без первичной погрешности, а второе – с первичной погрешностью в сильно увеличенном масштабе. Из геометрических соотношений, получаемых при таких построениях, находят аналитические выражения, связывающие первичную и частную погрешности.

При реализации геометрического метода вводят ряд упрощений и допущений, сущность которых заключается в исключении ошибок второго и больших порядков малости: для малых углов $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$, дуга и ее хорда равны и т.п. Под малым углом понимается угол, дающий отношение катета к гипотенузе приблизительно $10^{-3} - 10^{-4}$.

Пример. Тангенсный механизм.

Определим погрешность от несоответствия параметра q номинальному значению на величину Δq .

На рис. 5.11 представлена схема тангенсного механизма в двух положениях. Положение 1 соответствует механизму без погрешности параметра q , а положение 2 – механизму с первичной погрешностью Δq . Из треугольника $AA'B$ получим: $A'B = AB \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно, $\Delta y_q = \Delta q \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

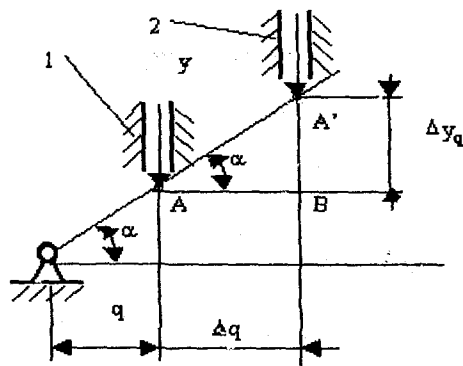


Рис. 5.11. Тангенсный механизм в двух положениях

Существует целый ряд других методов расчета частных погрешностей. В основном, они реализуются для механических цепей (метод относительных ошибок, метод плеча). В данной работе рассмотрение этих методов не представлено.

5.4 Определение частных погрешностей для скалярных первичных погрешностей

Скалярные погрешности являются наиболее распространенным видом первичных погрешностей.

В случае, когда первичная погрешность детерминированная (значение погрешности известно), частная погрешность также является известной величиной, остающейся постоянной или изменяющейся по какой-либо функциональной зависимости в пределах диапазона. Такая частная погрешность вносит вклад в систематическую погрешность измерительного устройства и для конкретного значения измеряемой величины характеризуется одним значением (с учетом знака). Представленные в п. 5.3 зависимости для расчета, выводы и примеры полностью соответствуют данному типу первичных погрешностей.

В процессе проектирования обычно неизвестны конкретные значения первичных погрешностей, известен лишь интервал, в котором будет лежать действительное значение размера или параметра. В дан-

ной ситуации на этапе расчетов при проектировании уместно предполагать, что значения первичных погрешностей являются случайными.

Принимая первичную погрешность за случайную величину, невозможно ее описать математически одним числом, как это было в случае детерминированной погрешности. Наиболее исчерпывающую информацию о первичной погрешности можно представить в виде закона распределения ее вероятности. Обычно ограничиваются точечными оценками этого закона, а именно, математическим ожиданием $M(\Delta q_s)$ и средним квадратическим отклонением первичной погрешности $S(\Delta q_s)$.

Математическое ожидание характеризует систематическую составляющую первичной погрешности (смещение центра группирования относительно номинального значения), а среднее квадратическое отклонение характеризует случайную составляющую этой погрешности (степень рассеяния относительно центра группирования).

Случайная первичная погрешность может привести только к случайной частной погрешности, которая также должна характеризоваться законом распределения вероятности с точечными оценками: математическим ожиданием $M(\Delta y_{q_s})$ (систематическая составляющая) и средним квадратическим отклонением $S(\Delta y_{q_s})$ (случайная составляющая). Рассмотрим выражения для определения указанных оценок частной погрешности.

Анализ основной формулы линейной теории точности (5.6) показывает, что коэффициент влияния рассчитывается при номинальных значениях параметра, поэтому для рассматриваемого варианта расчета (первичная погрешность скалярная и случайная) коэффициент влияния не является случайной величиной. Воспользовавшись уравнением теории вероятности для функции случайной переменной, получим:

$$M(\Delta y_{q_s}) = \left(\frac{dy}{dq_s} \right)_0 \cdot M(\Delta q_s); \quad (5.14)$$

$$S(\Delta y_{q_s}) = \left| \frac{dy}{dq_s} \right|_0 \cdot S(\Delta q_s). \quad (5.15)$$

Пример. Двойной синусный механизм.

Определим частные погрешности от несоответствия действительных размеров рычагов 1 (a) и 2 (b) двойного синусного механизма (рис. 5.12а) при следующих конструктивных параметрах: $a = 4$ мм; $b = 10$ мм; $x = 0,5$ мм; $M(\Delta a) = 0$; $S(\Delta a) = 0,005$ мм; $M(\Delta b) = 0,01$ мм; $S(\Delta b) = 0,005$ мм.

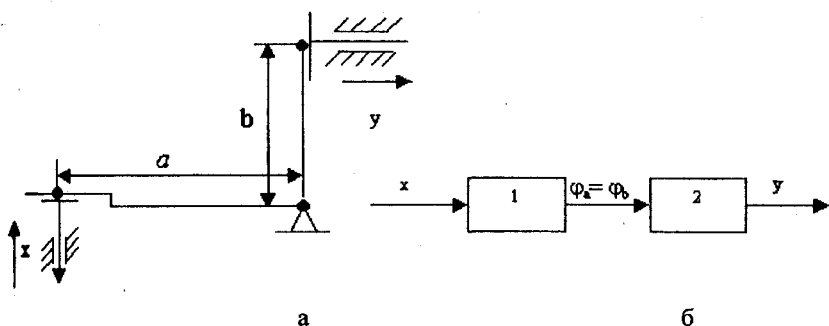


Рис. 5.12. Принципиальная (а) и функциональная (б) схемы двойного синусного механизма

1. Составим функциональную схему и математическое описание устройства. На основании принципиальной схемы устанавливаем, что измерительный механизм имеет два последовательно соединенных синусных механизма (рис. 5.12б):

$$\begin{cases} \varphi_a = \varphi_b = \arcsin \frac{x}{a}; \\ y = b \cdot \sin \varphi_b; \end{cases}$$

$$y = b \sin \varphi \left[\arcsin \frac{x}{a} \right] = x \frac{b}{a}.$$

2. Проанализируем первичные погрешности Δa и Δb .

Погрешности относятся к разряду случайных скалярных.

3. Определим характеристики частной погрешности Δy_a от первичной погрешности Δa :

$$M(\Delta y_a) = \left(\frac{dy}{da} \right)_0 \cdot M(\Delta a) = 0;$$

$$S(\Delta y_a) = \left| \frac{dy}{da} \right|_0 \cdot S(\Delta a) = \left| -x \frac{b}{a^2} \right| \cdot S(\Delta a) = \left| -0,5 \cdot \frac{10}{4^2} \right| \cdot 0,005 = 0,0016 \text{ мм.}$$

Первая частная погрешность не имеет систематической составляющей, но имеет случайную составляющую со значением среднего квадратического отклонения 0,0016 мм.

4. Определим характеристики частной погрешности Δy_b от первичной погрешности Δb :

$$M(\Delta y_b) = \left(\frac{dy}{db} \right)_0 \cdot M(\Delta b) = \frac{x}{a} M(\Delta b) = \frac{0,5}{4} \cdot 0,01 = 0,0013 \text{ мм;}$$

$$S(\Delta y_b) = \left| \frac{dy}{db} \right|_0 \cdot S(\Delta b) = \frac{x}{a} S(\Delta b) = \frac{0,5}{4} \cdot 0,005 = 0,0006 \text{ мм.}$$

Вторая частная погрешность имеет положительную систематическую составляющую со значением 0,0013 мм и случайную составляющую со средним квадратическим отклонением 0,0006 мм.

Отметим, что при одинаковой случайной составляющей первичных погрешностей разных плеч получились различные случайные составляющие частных погрешностей, это обусловлено различными значениями коэффициентов влияния.

5.5 Определение частных погрешностей для векторных первичных погрешностей

К числу векторных первичных погрешностей относят отклонения от номинальных значений параметров, характеризующиеся не только значением, но и направлением действия. Среди векторных погрешностей существенное место занимают погрешности параметров, номинальные значения которых равны нулю (зазоры, перекосы, отклонение от правильной геометрической формы и расположения поверхностей, эксцентриситеты). Сложность учета векторных погрешностей обусловлена тем, что наряду со значением первичной погрешности необходимо учитывать и ее направление.

Для расчета частных погрешностей в случае *детерминированных векторных первичных погрешностей* рекомендуется следующее пра-

вило: результат действия векторной первичной погрешности на выходную величину определяется по методу преобразованных схем путем проектирования вектора на нормаль к поверхностям в точках касания элементов кинематических пар.

Пример 1. Передача от кулачка к толкателю.

Пусть кулачок (рис. 5.13) имеет эксцентриситет Δe , который характеризуется модулем Δe и аргументом φ . Наличие эксцентриситета приведет к частной погрешности выходного перемещения толкателя Δy_e . Определим эту погрешность.

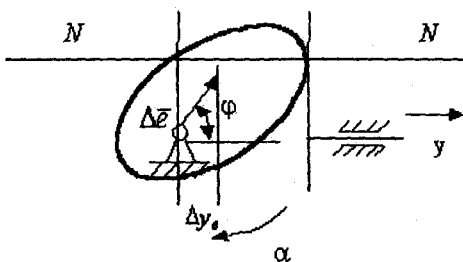


Рис. 5.13. Схема кулачкового механизма

Согласно изложенному правилу частная погрешность определяется как проекция эксцентриситета на общую нормаль в точке касания NN :

$$\Delta y_e = \Delta e \cdot \cos \varphi.$$

Если ввести входное воздействие α , то выражение для функции частной погрешности будет иметь вид:

$$\Delta y_e(\alpha) = \Delta e \cdot \cos(\varphi + \alpha).$$

Пример 2. Круговая шкала.

Определим погрешность показаний, обусловленную тем, что ось указателя не проходит через геометрический центр круговой шкалы (от эксцентриситета Δe круговой шкалы). Пусть шкала имеет эксцентриситет (рис. 5.14), который характеризуется модулем Δe и аргументом φ (угол φ определяется между вектором эксцентриситета и нормалью NN к направлению указателя).

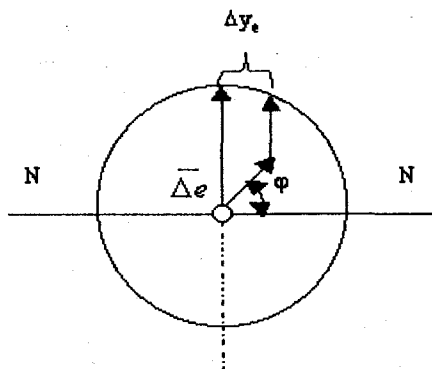


Рис. 5.14. Круговая шкала с эксцентриситетом

Частная погрешность определяется также проекцией вектора первичной погрешности на направление нормали, при этом нормаль строится к указателю. В таком случае погрешность определяется:

$$\Delta'y_e = \Delta e \cdot \cos \varphi.$$

Для того, чтобы перейти к размерности частной погрешности, необходимо умножить $\Delta'y_e$ на масштабный коэффициент:

$$\Delta y_e = \frac{C}{a_{ш}} \cdot \Delta e \cdot \cos \varphi,$$

где $a_{ш}$ — длина деления шкалы.

Иллюстрируемые на рис. 5.15 примеры показывают, что частная погрешность может принимать значения от 0, когда $\varphi = \pm \pi/2$, (рис. 5.15а) до $\pm \Delta e C/a_{ш}$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (рис. 5.15б).

Наиболее сложными для учета являются *векторные случайные первичные погрешности*. Это обусловлено тем, что как модуль, так и аргумент первичной погрешности являются величинами случайными, причем законы распределения вероятности для модуля и аргумента, как правило, бывают различными. Частная погрешность в данном случае будет также величиной случайной.

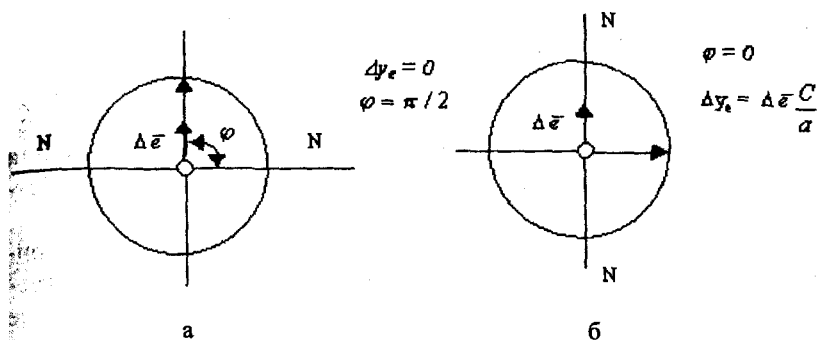


Рис. 5.15. Частные случаи расчета погрешности от эксцентриситета шкалы

Анализируя формулу линейной теории точности (5.6), можно утверждать, что для векторных случайных погрешностей случайными являются не только значение первичной погрешности, но и коэффициент влияния, поскольку в него входят характеристики случайной первичной погрешности. Следовательно, частная погрешность определяется как произведение двух случайных величин: коэффициента влияния и первичной погрешности.

Не останавливаясь на данном вопросе подробно, отметим, что частная погрешность имеет свой собственный закон распределения вероятности, который определяется как композиция нескольких законов распределения. При этом точечные оценки частной погрешности могут быть определены по формулам для произведения двух случайных величин:

$$M(\Delta y_{q_s}) = M\left(\frac{dy}{dq_s}\right) \cdot M(\Delta q_s);$$

$$S(\Delta y_{q_s}) = \sqrt{S^2\left(\frac{\partial y}{\partial q_s}\right) \cdot S^2(\Delta q_s) + S^2\left(\frac{\partial y}{\partial q_s}\right) \cdot M^2(\Delta q_s) + S^2(\Delta q_s) M^2\left(\frac{\partial y}{\partial q_s}\right)}.$$

5.6 Определение характеристик технологических первичных погрешностей

Рассмотренные ранее методы учета влияния несоответствия параметров номинальным значениям на точность измерительного устрой-

ства предполагают анализ первичных погрешностей и их математическое описание. Исходным материалом для точностных расчетов является конструкторская документация, в которой, как правило, не приводятся законы распределения вероятности первичных погрешностей и тем более действительные значения погрешностей. В документации обычно указывается поле допуска, в пределах которого лежит действительное значение внутреннего параметра.

Рассмотрим пути определения необходимых исходных характеристик первичных погрешностей. Зная предельно допускаемые отклонения действительного значения параметра от номинального (поле допуска), можно утверждать, что первичная погрешность не может превышать предельных отклонений. Следовательно, мы можем определить максимальное значение первичной погрешности и диапазон ее возможных изменений.

Для применения вероятностных методов анализа необходимо знать статистические оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения первичных погрешностей. Подход к решению данной задачи следующий. За основу берется закон распределения вероятности размера в поле допуска (поле рассеяния размеров) и рассматривается его расположение относительно поля допуска (рис. 5.16).

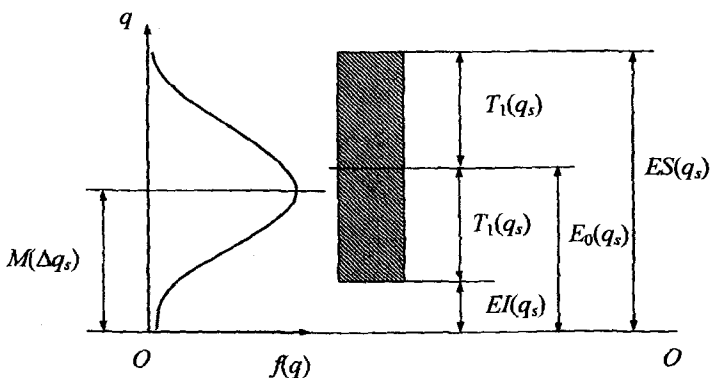


Рис. 5.16. Схема взаимного расположения допуска и поля рассеяния значений внутреннего параметра q

Пусть центр группирования случайной технологической первичной погрешности характеризуется некоторым значением $M(\Delta q_s)$ и $S(\Delta q_s)$, при этом поле допуска параметра характеризуется нижним $EI(q_s)$ и верхним $ES(q_s)$ предельными отклонениями.

К рассмотрению принимаются следующие характеристики:

1. Координата середины поля допуска E_0 определяет положение середины поля допуска относительно номинального значения параметра:

$$E_0 = 0,5(ES + EI). \quad (5.16)$$

2. Половина поля допуска T_1 характеризует величину допуска на параметр:

$$T_1 = 0,5(ES - EI). \quad (5.17)$$

3. Коэффициент относительной асимметрии α_q оценивает величину удаления центра группирования от середины поля допуска. Определяется отношением величины смещения центра группирования от середины поля допуска к половине поля допуска:

$$\alpha_q = \frac{M(\Delta q_s) - E_0}{T_1}. \quad (5.18)$$

4. Коэффициент рассеяния (относительное среднее квадратическое отклонение) λ характеризует, какую долю составляет среднее квадратическое отклонение от величины половины поля допуска:

$$\lambda = \frac{S(\Delta q_s)}{T_1}. \quad (5.19)$$

Анализ рассматриваемых параметров показывает, что первые два из них (E_0 и T_1) характеризуют требуемую точность получения значения параметра q_s и определяются по данным о поле допуска на параметр из конструкторской документации.

Любой технологический процесс финишной обработки имеет свои статистические характеристики закона распределения вероятностей технологических погрешностей, которые характеризуются математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением. Коэффици-

ент относительной асимметрии α_q характеризует точность настройки технологического оборудования при получении значения параметра. Для симметричного распределения $\alpha_q = 0$, при $\alpha_q > 0$ говорят о положительной асимметрии, при $\alpha_q < 0$ – об отрицательной.

Коэффициент рассеяния λ указывает на соотношение требуемой точности изготовления параметра и точности технологического оборудования. Значение λ также существенно зависит и от закона распределения вероятности.

С учетом (5.16) – (5.19) можно определить требуемые статистические оценки первичных технологических погрешностей, зная описанные выше четыре характеристики:

$$M(\Delta q_s) = E_0 + T_1 \cdot \alpha_q; \quad (5.20)$$

$$S(\Delta q_s) = \lambda \cdot T_1.$$

Таким образом, задача сводится к определению α_q и λ , а для этого нужно знать характеристики распределения технологических погрешностей.

Существует три подхода к определению этих характеристик:

1. *Определение кривых распределения по производственным наблюдениям.* Если расчет точности производится для прибора уже изготавливаемого в производстве или имеется производство аналогичного прибора, то отбирается группа одинаковых деталей, для которых измеряется исходный параметр. Кривую распределения получают статистической обработкой данных.

2. *Изучение технологического процесса окончательной обработки.* Кривая распределения может быть определена путем исследования технологического процесса получения размера. Статистические данные по исследованию различных процессов имеются в справочной литературе.

3. *Выбор кривых распределения из схематизированных таблиц.* В специальной литературе имеются схематизированные таблицы, в которых для различных производственных процессов представлены типовые законы распределения с указанием значений α_q и λ .

Так, например, нормальный закон распределения, практически совпадающий с полем допуска, характеризуется параметрами: $\alpha_q = 0$; $\lambda = 1/3 \approx 0,33$. Распределение имеет место: при автоматическом полу-

чении размеров детали на автоматах; при развертывании и протяжке; отчасти при обработке на револьверных и фрезерных станках. Распределение имеет место при условиях: погрешность вызывается влиянием большого числа факторов, среди которых нет доминирующего; средства производства соответствуют допуску; при настройке центр группирования совмещается с серединой поля допуска.

Примеры значений параметров α_q и λ для характеристики точности размеров после некоторых технологических операций представлены в табл. 5.1 [8].

Таким образом, формулы (5.14) и (5.15) нахождения параметров частной погрешности для первичных технологических погрешностей принимают вид:

$$M(\Delta y_{q_s}) = \left(\frac{\partial y}{\partial q_s} \right)_0 (E_0 + T_1 \alpha_q); \quad (5.21)$$

$$S(\Delta y_{q_s}) = \left| \frac{\partial y}{\partial q_s} \right| \cdot \lambda \cdot T_1. \quad (5.22)$$

Пример. Двойной синусный механизм.

Определим частные погрешности от несоответствия действительных размеров рычагов 1 (a) и 2 (b) двойного синусного механизма (рис. 5.12а) при следующих параметрах: $a = 4^{+0,008}_{-0,004}$; $b = 10^{+0,010}_{-0,005}$; $x = 0,5$ мм.

1. Составим математическое описание. Согласно рассмотренному в п. 5.5 примеру расчетная характеристика имеет вид:

$$y = x b / a.$$

2. Анализируя первичные погрешности, делаем вывод, что они скалярные и заданы полем допуска.

3. Предполагая шлифование в качестве финишной операции получения размеров, принимаем: $\lambda = 0,4$; $\alpha_q = 0,3$.

4. Определим значения параметров E_0 и T_1 для параметров a и b :

$$E_0(a) = \frac{0,008 + (-0,004)}{2} = 0,002 \text{ мм}; \quad E_0(b) = \frac{0,010 + (-0,005)}{2} = 0,0025 \text{ мм};$$

$$T_1(a) = \frac{0,008 - (-0,004)}{2} = 0,006 \text{ мм}; \quad T_1(b) = \frac{0,010 - (-0,005)}{2} = 0,0075 \text{ мм}.$$

5. Определим статистические характеристики первичных погрешностей:

$$M(\Delta a) = E_0(a) + \alpha_q T_1(a) = 0,002 + 0,3 \cdot 0,006 = 0,0038 \text{ мм};$$

$$S(\Delta a) = \lambda T_1(a) = 0,4 \cdot 0,006 = 0,0024 \text{ мм};$$

$$M(\Delta b) = E_0(b) + \alpha_q T_1(b) = 0,0025 + 0,3 \cdot 0,0075 = 0,0048 \text{ мм};$$

$$S(\Delta b) = \lambda T_1(b) = 0,4 \cdot 0,0075 = 0,0030 \text{ мм}.$$

6. Определим статистические характеристики частных погрешностей:

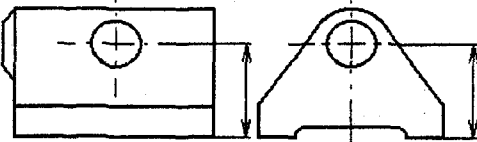
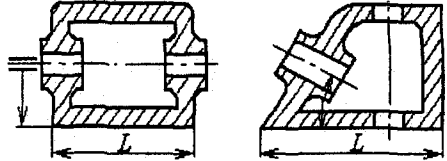
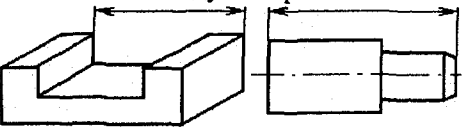
$$M(\Delta y_a) = \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)_0 M(\Delta a) = -x \frac{b}{a^2} \cdot M(\Delta a) = -0,5 \frac{10}{4^2} \cdot 0,0038 = -0,0012 \text{ мм};$$

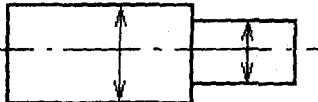

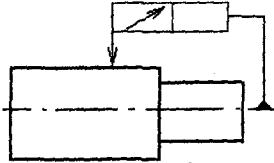
$$S(\Delta y_a) = \left| \frac{\partial y}{\partial a} \right|_0 S(\Delta a) = x \frac{b}{a^2} \cdot S(\Delta a) = 0,5 \frac{10}{4^2} \cdot 0,0024 = 0,00075 \text{ мм};$$

$$M(\Delta y_b) = \left(\frac{\partial y}{\partial b} \right)_0 M(\Delta b) = x \frac{1}{a} \cdot M(\Delta b) = 0,5 \frac{1}{4} \cdot 0,0048 = 0,0006 \text{ мм};$$

$$S(\Delta y_b) = \left| \frac{\partial y}{\partial b} \right|_0 S(\Delta b) = x \frac{1}{a} \cdot S(\Delta b) = 0,5 \frac{1}{4} \cdot 0,003 = 0,00038 \text{ мм}.$$

Значения характеристик технологических погрешностей

Выполняемый размер детали	Технологическая операция	T , мм	λ	α_q
1	2	3	4	5
Расстояние от оси отверстия до базовой поверхности 	Шлифование плоскости с выверкой по оси отверстия	0,04...0,12	0,43...0,47	0,3...0,4
	Фрезерование плоскости с выверкой по оси отверстия	0,10...0,40	0,30...0,43	0...0,3
	Растачивание отверстий на расточном или сверлильном станке	0,10...0,30	0,33...0,40	0
Параллельность, перпендикулярность, точность угла к базовой поверхности 	Шлифование плоскости с выверкой по оси отверстия	$\frac{0,05...0,10}{L}$	0,40...0,43	0
	Фрезерование плоскости с выверкой по оси отверстия	$\frac{0,10...0,30}{L}$	0,37...0,40	0
	Обработка отверстий на расточном или сверлильном станке	$\frac{0,10...0,30}{L}$	0,37...0,43	0...0,1
Расстояние между поверхностями 	Шлифование	0,02...0,10	0,43...0,47	0
	Обработка на фрезерных, строгальных и расточных станках.	0,10...1,00	0,43...0,47	0...0,1
	Обработка на токарных, револьверных станках и автоматах	0,10...0,40	0,37...0,47	$\pm 0,2$

1	2	3	4	5
Диаметры наружных цилиндрических поверхностей 	Шлифование Обработка на токарных, револьверных станках, автоматах	0,01...0,10 0,10...0,50	0,33...0,47 0,37...0,47	0...0,1 ± 0,2
Диаметры отверстий 	Шлифование Протягивание Развертывание Обработка на расточных станках	0,01...0,10 0,01...0,10 0,01...0,10 0,02...0,20	0,33...0,43 0,33...0,40 0,33...0,40 0,37...0,40	0 0 0 0...-0,2
Радиальное биение 	Шлифование Обработка на токарных, револьверных станках, автоматах	0,01...0,02 0,02...0,10	0,38 0,40	-0,3 -0,3

5.7 Определение дополнительных погрешностей и функций влияния помех на погрешность

При изменении внешних и внутренних влияющих факторов, например температуры, происходят соответствующие изменения внутренних параметров, вследствие чего изменяются значения отклонений этих параметров от номинальных значений, изменяется реальная функция преобразования и, соответственно, погрешность.

Если влияющий фактор (помеха) изменяется в пределах нормальных условий, то возникает задача в определении функции влияния этого фактора (например, температуры) на погрешность. Если изменения влияющего фактора выходят за пределы нормальных условий, то возникает задача расчета дополнительной погрешности.

Определим пути решения этих задач. Прежде всего необходимо знать функциональные зависимости между влияющими факторами η_j и внутренними параметрами q_i .

Функция $q_i = f(\eta_j)$ определяется исходя из физических зависимостей, описывающих происходящие в измерительном устройстве процессы при изменении влияющих факторов. Так, например, зависимость сопротивления проводника от температуры для меди имеет вид: $R_t = R_0 (1 + \alpha_t t)$. Пусть влияющий фактор η_j изменился на $\Delta\eta_j$, тогда выражение для q_i принимает вид: $q_i = f(\eta_j + \Delta\eta_j)$, а значение первичной погрешности, обусловленной этим изменением, определяется из выражения:

$$\Delta q_i(\eta_j) = f(\eta_j + \Delta\eta_j) - f(\eta_j). \quad (5.23)$$

Если изменение фактора $\Delta\eta_j$ несущественно, то по аналогии с основной формулой линейной теории точности (5.6) первичную погрешность можно определить из выражения:

$$\Delta q_i(\eta_j) = \left(\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \right)_0 \cdot \Delta\eta_j. \quad (5.24)$$

Таким образом, **алгоритм** определения погрешности измерительного устройства, обусловленной изменением влияющего фактора η_j на величину $\Delta\eta_j$ следующий:

– выявление внутренних параметров q_i , на которые оказывает воздействие исследуемый фактор η_j (из анализа конструкторской документации на устройство и расчетной характеристики);

– установление функции влияния фактора η_j на выявленные внутренние параметры $q_i = f(\eta_j)$ (на основании априорной информации и справочных данных);

– анализ существенности изменения влияющего фактора $\Delta\eta_j$ по отношению к его номинальному значению η_j (при выполнении условия $\Delta\eta_j/\eta_j < 0,1$ изменение можно считать несущественным);

– определение отклонения внутреннего параметра $\Delta q_i(\eta_j)$, обусловленного изменением фактора;

– определение частной погрешности $\Delta y_{q_i}(\eta_j)$ (при существенности изменения влияющего фактора из выражения (5.25), при несущественности – из (5.26)):

$$\Delta y_{q_i}(\eta_j) = \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right) \cdot [f(\eta_j + \Delta\eta_j) - f(\eta_j)]; \quad (5.25)$$

$$\Delta y_{q_i}(\eta_j) = \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)_0 \left(\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \right)_0 \Delta\eta_j. \quad (5.26)$$

Следует отметить, что не все возмущающие факторы воздействуют на погрешность измерительного устройства посредством изменения внутренних параметров. Есть факторы, влияющие непосредственно на входной сигнал, и внутренние дестабилизирующие факторы (п.п. 1.2; 3.2).

Не останавливаясь подробно на выводе расчетных формул, которые получаются аналогично рассмотренным выше случаям, отметим, что составляющие погрешности измерительного устройства от внутренних дестабилизирующих факторов и внешних возмущающих воздействий на входной сигнал можно определить, соответственно, из выражений:

$$\Delta y(\varepsilon) = \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \cdot \Delta \varepsilon; \quad \Delta y(\nu) = \frac{\partial y}{\partial \nu} \cdot \Delta \nu.$$

5.8 Суммирование частных погрешностей

При анализе точности измерительных устройств для определения суммарной погрешности от несоответствия параметров и размеров номинальным значениям нужно суммировать вклады отдельных первичных погрешностей.

При суммировании частных погрешностей необходимо, прежде всего, классифицировать их по признаку: являются ли они систематическими или случайными. Если погрешности систематические, то их суммируют алгебраически, если они случайные, то их суммируют по правилам суммирования случайных величин из теории вероятности.

Детерминированные первичные погрешности, как было показано выше, приводят к систематическим частным погрешностям, которые формируют систематическую составляющую суммарной погрешности от несоответствия параметров номинальным значениям. Случайные первичные погрешности приводят к случайным частным, которые в свою очередь формируют как случайную, так и систематическую составляющие суммарной погрешности.

Рассматривая суммарную погрешность от несоответствия параметров q_i номинальным значениям, отметим, что, применяя выражение полного дифференциала для N первичных погрешностей при выполнении условия $\Delta q_i \ll q_i$, можно записать:

$$\Delta y_{q\Sigma} = \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)_0 \cdot \Delta q_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \right)_0 \cdot \Delta q_2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)_0 \cdot \Delta q_i + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial q_N} \right)_0 \cdot \Delta q_N.$$

Таким образом, в случае детерминированных первичных погрешностей для определения суммарной погрешности от несоответствия параметров номинальным значениям достаточно алгебраически сложить частные погрешности:

$$\Delta y_{q\Sigma} = \sum_1^N \Delta y_{q_i} = \sum_1^N \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)_0 \Delta q_i. \quad (5.27)$$

Для случайных первичных погрешностей суммирование частных погрешностей производится по правилам суммирования случайных величин, а именно, раздельно суммируют математические ожидания и среднеквадратические отклонения:

$$M(\Delta y_{q\Sigma}) = \sum_1^N M(\Delta y_{q_i}); \quad (5.28)$$

$$S(\Delta y_{q\Sigma}) = \sqrt{\sum_1^N S^2(\Delta y_{q_i})}. \quad (5.29)$$

Полученные выражения могут использоваться лишь в случае независимых первичных погрешностей. Если они зависимы, то в формулы необходимо вводить слагаемые типа $2S_{q_i}S_{q_j}K_{ij}$, где K_{ij} – коэффициент корреляции между параметрами q_i и q_j .

Бывают ситуации, когда принцип суперпозиций применить не представляется возможным. Как правило, они определяются двумя причинами:

- наличие в устройстве лишних параметров, не обязательных для осуществления заданной функции преобразования, но приводящих к погрешности;

- наличие взаимосвязанных погрешностей.

Рассмотрим несколько поясняющих сказанное примеров.

Пример 1. Передача винт – гайка.

Для передачи движения на гайке необходимо иметь только один виток, однако из условий прочности обычно их бывает несколько. Неточность изготовления каждого из витков дает свой вклад в погрешность перемещения, при этом общая погрешность не равна сумме погрешностей отдельных витков, а определяется некоторым усредненным образом.

Пример 2. Зубчатое зацепление.

Аналогично вышесказанному, в зацеплении обычно одновременно находятся несколько зубьев, и погрешности от неточности изготовления профиля каждого зуба, оказывающие влияние на общую погрешность передачи, также не могут быть сложены алгебраически.

Пример 3. Передача винт – толкатель.

На рис. 5.17а представлена схема преобразователя углового перемещения x в линейное перемещение y .

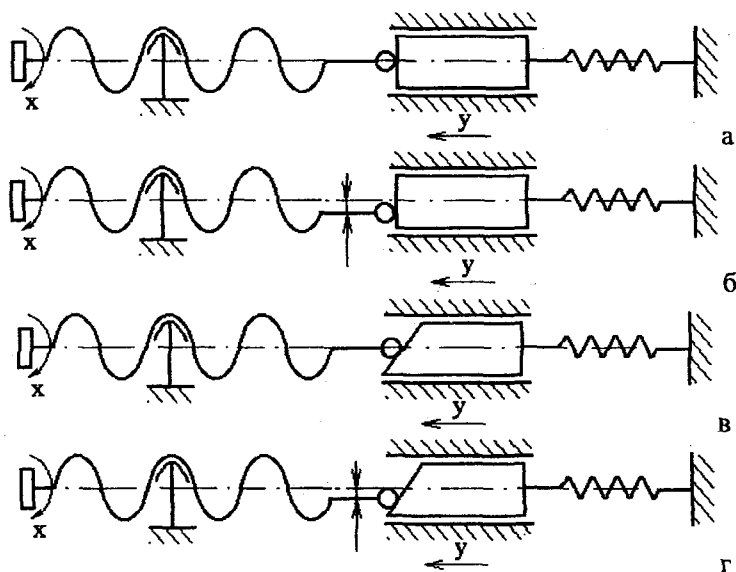


Рис. 5.17. Схемы преобразователя углового перемещения в линейное

Из анализа схемы видно, что такие погрешности изготовления элементов преобразователя, как эксцентриситет сферического накопчика винта (рис. 5.17б) и отклонение от перпендикулярности рабочей поверхности и оси толкателя (рис. 5.17в) при их отдельном появлении практически не влияют на точность преобразования. В то же время, при одновременном наличии обеих первичных погрешностей (рис. 5.17г), передаточный механизм имеет погрешность преобразования, изменяющуюся по гармоническому закону.

Интерес представляет определение доверительного интервала для суммарной погрешности, поэтому после нахождения математического ожидания и среднеквадратического отклонения анализируют возможные пути расчета доверительного интервала погрешности. Для решения данной задачи необходимо иметь информацию о виде закона распределения суммарной погрешности. При известном законе доверительный интервал для суммарной погрешности определяется из выражения:

$$\Delta y_{q\Sigma} = M(\Delta y_{q\Sigma}) \pm t_P S(\Delta y_{q\Sigma}), \quad (5.30)$$

где квантиль распределения t_p определяется из соответствующих таблиц в зависимости от вида закона распределения и заданной доверительной вероятности P (достоверности результата).

Часто для описания распределения вероятности суммарной погрешности вполне приемлемым оказывается нормальный закон распределения. Закон распределения погрешности может быть принят нормальным при выполнении одного из следующих условий:

- суммируются частные погрешности с законами распределения, близкими к нормальному;
- если одна из частных погрешностей имеет нормальный закон распределения и является доминирующей;
- если суммируется большое количество погрешностей, среди которых нет доминирующих.

Погрешность Δy_{q_j} считают доминирующей при выполнении условия:

$$S^2(\Delta y_{q_j}) \geq 0,7 \sum_{i=1}^n S^2(\Delta y_i).$$

В случае нормального закона распределения суммарной погрешности доверительный интервал для нее рассчитывают из выражения (5.30), при этом значение квантиля распределения t_p определяют из таблиц Гауссовского распределения. Так, например, $t_{0,997} = 3$, а $t_{0,95} \approx 2$.

Если априорной информации о виде закона распределения суммарной погрешности нет, то закон определяют как композицию законов распределения частных погрешностей. Однако реализация данной процедуры часто представляет сложность, поэтому обычно ограничиваются определением квантиля t_p и доверительного интервала суммарной погрешности с использованием неравенства Чебышева:

$$P \geq 1 - 1/t_p^2. \quad (5.31)$$

Данный метод позволяет рассчитать доверительный интервал, удовлетворяющий любому закону распределения вероятности, поэтому полученная оценка погрешности является существенно завышенной. Так, например, $t_{0,997} \leq 18$, а $t_{0,95} \leq 4,5$.

Пример 4. Двойной синусный механизм.

Определим суммарную погрешность от несоответствия действительных размеров рычагов 1 (a) и 2 (b) двойного синусного механизма (рис. 5.12а) номинальным значениям при рассмотренных в примере п. 5.6 конструктивных параметрах.

В указанном выше примере были определены характеристики двух частных погрешностей, обусловленных первичными погрешностями размеров рычагов:

$$M(\Delta y_a) = -0,0012 \text{ мм}; S(\Delta y_a) = 0,00075 \text{ мм};$$

$$M(\Delta y_b) = 0,0006 \text{ мм}; S(\Delta y_b) = 0,00038 \text{ мм}.$$

Для определения статистических оценок суммарной погрешности, принимая первичные погрешности независимыми, воспользуемся выражениями (5.28) и (5.29):

$$\begin{aligned} M(\Delta y_{q\Sigma}) &= \sum_1^N M(\Delta y_{q_i}) = M(\Delta y_a) + M(\Delta y_b) = \\ &= -0,0012 + 0,0006 = -0,0006 \text{ мм}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\Delta y_{q\Sigma}) &= \sqrt{\sum_1^N S^2(\Delta y_{q_i})} = \sqrt{[S^2(\Delta y_a) + S^2(\Delta y_b)]} = \\ &= \sqrt{[0,00075^2 + 0,00038^2]} = 0,00084 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Принимая законы распределения частных погрешностей и суммарной погрешности нормальными, можно согласно (5.30) записать с доверительной вероятностью $P = 0,997$:

$$\Delta y_{q\Sigma} = M(\Delta y_{q\Sigma}) \pm t_\alpha S(\Delta y_{q\Sigma}) = -0,0006 \pm 3 \cdot 0,00084 = (-0,0006 \pm 0,0025) \text{ мм}.$$

Таким образом, с доверительной вероятностью 0,997 можно утверждать, что при нормальном законе распределения вероятности суммарная погрешность от несоответствия параметров a и b номинальным значениям лежит в интервале $[-3; +2]$ мкм.

Для доверительной вероятности 0,95 интервал сужается до значений $[-2; +1]$ мкм, а при использовании неравенства Чебышева (когда нет информации о законе распределения вероятности погрешности) и доверительной вероятности 0,95 — расширяется до значений $[-4; +3]$ мкм.

6. РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

6.1 Общие подходы к расчетам

Ранее рассмотренные источники динамической погрешности приводят к тому, что характер изменения во времени выходного сигнала не соответствует характеру изменения сигнала входного, т.е. имеет место неточность в преобразовании, которую на этапе проектирования измерительного устройства, работающего в динамическом режиме, необходимо оценивать.

Подходы к расчету погрешности во многом зависят от причины ее возникновения и структуры динамической системы, заложенной в основу работы устройства. Динамические системы классифицируются на группы линейных и нелинейных. Если измерительное устройство содержит только линейные элементы, то оно называется *линейным*. Если хотя бы одно из звеньев является нелинейным, то всё измерительное устройство считается *нелинейным*.

Нелинейные измерительные устройства описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, их сущность заключается в том, что параметры звена сами зависят от входной величины и от значения помехи. Все многообразие нелинейных систем может быть разделено на две группы:

– *устройства с существенно нелинейными характеристиками* (к этому классу относят устройства, содержащие элементы, характеристики которых не могут быть линеаризованы в требуемом диапазоне без потери их существенных особенностей);

– *устройства с несущественно нелинейными характеристиками* (устройство содержит звенья, характеристики которых могут быть линеаризованы в достаточно широком диапазоне без потери их существенных особенностей).

Анализ существенно нелинейных устройств является весьма сложным. При анализе объектов с несущественно нелинейными характеристиками стремятся линеаризовать характеристику, а устройство рассматривают как линейную систему. При этом необходимо следить, чтобы данные допущения не вызывали погрешностей, превышающих допустимые значения.

Собственные динамические погрешности подразделяются на четыре типа:

$$\Delta y(t) = y(t) - x(t), \quad (6.1)$$

$$\Delta W(p) = W(p) - W(0), \quad (6.2)$$

$$\Delta C(\omega) = C(\omega) - C(0), \quad (6.3)$$

$$\Delta h(t) = h(t) - h(\infty). \quad (6.4)$$

Погрешности, определяемые формулой (6.1), называются *погрешностями формы* и характеризуют степень искажения формы выходного сигнала $y(t)$ по сравнению с входным сигналом $x(t)$. Погрешности, определяемые формулой (6.2), называются *операционными погрешностями*. Они характеризуют степень искажения передаточной функции по отношению к статическому режиму. Погрешности, определяемые формулой (6.3), называются *частотными погрешностями*. Из них могут быть получены амплитудные и фазовые частотные погрешности, т.е. искажения амплитуды и фазы в зависимости от частоты входного сигнала. Погрешности, определяемые формулой (6.4), называются *погрешностями переходного процесса*.

Правые части выражений (6.1) – (6.4) представляют собой разности между соответствующими характеристиками реального и идеального устройств. Если известно одно из рассмотренных уравнений, то можно получить любое другое, что широко используется при точных расчетах.

Расчет погрешности в каждом конкретном случае требует индивидуального подхода, хотя выделяются группы задач, при решении которых можно воспользоваться определенными рекомендациями. Рассмотрим некоторые из таких подходов.

6.2 Определение динамических погрешностей при детерминированных входных воздействиях

На практике чисто детерминированных воздействий не бывает. Однако при использовании измерительных устройств среди ансамбля возможных входных сигналов, для преобразования которых они предназначены, часто имеют место типовые входные воздействия, которые достаточно точно описываются некоторыми детерминированными функциями времени. В некоторых случаях необходимо определить погрешность при наименее благоприятном из возможных входных воздействий. Так или иначе возникает проблема в оценке по-

грешности устройства при конкретном (известном) входном воздействии.

Динамическая точность в данном случае может характеризоваться абсолютной величиной разности расчетной и реальной выходных величин.

Пусть $x(t)$ – известное входное воздействие на линейную динамическую систему со значением чувствительности – S . Тогда при отсутствии динамической погрешности расчетное значение выходного сигнала определяется выражением:

$$y_p(t) = x(t) S. \quad (6.5)$$

Ввиду неидеальности измерительной системы устройства будет иметь место динамическая погрешность $\Delta y_\partial(t)$, определяемая выражением:

$$\Delta y_\partial(t) = y_p(t) - y(t), \quad (6.6)$$

где $y(t)$ – действительное значение выходного сигнала.

Согласно динамическим характеристикам выходной сигнал может быть определен с помощью интеграла свертки:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau, \quad (6.7)$$

где $h(\tau)$ – весовая функция или импульсная переходная характеристика данного устройства.

Тогда динамическую погрешность можно представить в виде:

$$\Delta y_\partial(t) = S \cdot x(t) - \int_0^{\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau. \quad (6.8)$$

Таким образом, расчет динамической погрешности сводится к решению интеграла свертки. Рассмотрим подход к решению.

Пусть входной сигнал $x(t)$ можно представить в виде многочлена степени r , тогда $x(t - \tau)$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$x(t - \tau) = x(t) - \dot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t)}{2!} \tau^2 + \dots + (-1)^r \frac{x^{(r)}(t)}{r!} \tau^r. \quad (6.9)$$

Разложение имеет конечное число членов, поскольку предполагалось, что $x(t)$ полином степени r . Подставив значение $x(t - \tau)$ из (6.9) в (6.8), после упрощений получим:

$$\Delta y_0(t) = S \cdot x(t) - x(t) \int_0^\infty h(\tau) d\tau + \dot{x}(t) \int_0^\infty \tau \cdot h(\tau) d\tau + \dots + x^{(r)}(t) \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_0^\infty \tau^r \cdot h(\tau) d\tau. \quad (6.10)$$

Введем обозначение:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= S - \int_0^\infty h(\tau) d\tau \\ C_1 &= \int_0^\infty \tau \cdot h(\tau) d\tau \\ &\dots\dots\dots \\ C_r &= (-1)^{r+1} \int_0^\infty \tau^r \cdot h(\tau) d\tau \end{aligned} \right\}. \quad (6.11)$$

Запишем (6.10) с учетом (6.11):

$$\Delta y_0(t) = C_0 \cdot x(t) + C_1 \cdot \dot{x}(t) + \dots + \frac{C_r}{r!} \cdot x^{(r)}(t). \quad (6.12)$$

Анализ (6.12) показывает, что для снижения динамических погрешностей необходимо уменьшать, а по возможности обеспечить равенство нулю первых членов данного выражения. Этого можно добиться двумя путями: уменьшением сомножителей типа $x^{(r)}(t)$ и уменьшением коэффициентов C_i . Сомножители $x^{(r)}(t)$ определяются видом входного сигнала, а коэффициенты C_i – характеристиками измерительного устройства.

Коэффициенты $C_0, C_1, C_2, \dots, C_r$ носят название *коэффициентов ошибок*. Они могут быть легко вычислены с помощью передаточной функции:

$$C_i = \left. \frac{d^{(i)}[S - W(p)]}{dp^{(i)}} \right|_{p=0} \quad (6.13)$$

Следует отметить, что коэффициенты ошибок имеют определенный физический смысл. Они характеризуют *порядок астатизма* измерительного устройства. Так, например, если $C_0 = C_1 = 0$, то говорят, что устройство характеризуется астатизмом второго порядка, то есть любое входное воздействие, имеющее линейную функцию времени, будет обрабатываться без динамической погрешности.

Полученный вывод дает предпосылки для анализа и синтеза измерительного устройства в динамическом режиме. Составив математическое описание $W(p)$, по формуле (6.13) можно рассчитать коэффициенты ошибок C_i и по характеристике входного воздействия $x(t)$ определить ожидаемую динамическую погрешность.

При синтезе можно попытаться решить задачу оптимизации выбора параметров измерительного устройства, при которых заданное входное воздействие $x(t)$ будет преобразовываться без динамической погрешности или эта погрешность будет иметь минимально возможное значение.

Так, например, если входное воздействие изменяется согласно выражению: $x(t) = a + bt + dt^2$, то условия астатизма третьего порядка, при выполнении которых данный сигнал будет обрабатываться без динамической погрешности, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Определяя выражения для коэффициентов ошибок C_i из (6.13) и решая полученную систему уравнений относительно внутренних параметров измерительного устройства, рассчитываются оптимальные значения параметров, обеспечивающие астатизм третьего порядка.

Если задача исключения динамических погрешностей не имеет решений, то можно решить задачу их минимизации, исследовав выражение для динамической погрешности на экстремум:

$$\Delta y_{\delta}(t) = C_0 \cdot (a + bt + dt^2) + C_1 \cdot (b + 2dt) + \frac{C_2}{2!} \cdot 2d.$$

6.3 Расчет динамической погрешности, вызванной несоответствием параметров номинальным значениям

Несоответствие параметров номинальным значениям, возникающее при изготовлении или эксплуатации измерительного устройства, наряду со статической погрешностью приводит к появлению динамической погрешности. Расчет этой погрешности осуществляют методами *теории чувствительности*.

Пусть при номинальных значениях параметров, сигнал на выходе системы равен $y_0(t)$. Предположим, что значение одного из параметров отклоняется от номинального значения на величину α , при этом выходной сигнал будет функцией как времени, так и α :

$$y = y(t, \alpha), \quad (6.14)$$

а динамическая погрешность, обусловленная отклонением параметра, определится из выражения:

$$\Delta y_D = y(t, \alpha) - y_0(t). \quad (6.15)$$

Разложим функцию (6.14) в ряд Тейлора по степеням параметра α :

$$y(t, \alpha) = y_0(t) + \left(\frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right)_0 \alpha + \left(\frac{\partial^2 y(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right)_0 \frac{\alpha^2}{2} + \dots \quad (6.16)$$

Коэффициенты при α называют *функциями чувствительности*.

$$z(t) = \left(\frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right)_0; \quad z^2(t) = \left(\frac{\partial^2 y(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right)_0. \quad (6.17)$$

Знак «0» при частных производных означает, что расчет функций влияния производится при условии $\alpha = 0$.

Тогда с учетом (6.15) можно записать:

$$\Delta y_D = z(t, \alpha) \cdot \alpha + z^2(t, \alpha) \cdot \frac{\alpha^2}{2}. \quad (6.18)$$

Если α мало, то для практических целей можно ограничиться первым членом функции:

$$\Delta y_0 = z(t, \alpha) \cdot \alpha. \quad (6.18)$$

Из выражений (6.18) и (6.19) видно, что функции чувствительности характеризуют влияние отклонения параметра на изменение выходного сигнала. Отметим, что аналогом $z(t)$ при переходе к стационарному состоянию является коэффициент влияния.

Таким образом, зная выражение для выходного сигнала $y(t)$ можно путем его дифференцирования и приравнивания α к нулю непосредственно определить функции чувствительности по выражению (6.17).

Можно функции чувствительности определить и через передаточные функции, что является наиболее простым и предпочтительным методом.

Пусть измерительная цепь описывается передаточной функцией $W(p)$, тогда с учетом α передаточная функция примет вид $W(p, \alpha)$.

Согласно преобразованию Лапласа:

$$y(p, \alpha) = W(p, \alpha) \cdot x(p).$$

В этом случае оригинал выходного сигнала можно определить использованием обратного преобразования Лапласа:

$$y(t, \alpha) = L^{-1}[W(p, \alpha) \cdot x(p)].$$

Дифференцируя последнее равенство по α и приравнявая α к нулю, определим значение функций чувствительности:

$$z(t, \alpha) = L^{-1} \left\{ \left[\frac{\partial W(p, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_0 x(p) \right\}, \quad (6.19)$$

$$z^2(t, \alpha) = L^{-1} \left\{ \left[\frac{\partial^2 W(p, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right]_0 x(p) \right\}. \quad (6.20)$$

Пример. Аперриодическое звено.

Определим динамическую погрешность аперриодического звена, вызванную отклонением постоянной времени от номинального значения, при входном сигнале в виде единичного скачка.

Передаточная функция аперриодического звена имеет вид:

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1},$$

где T – постоянная времени данного звена.

Изображение входного сигнала в виде скачка имеет вид:

$$x(p) = 1/p.$$

Тогда изображение выходного сигнала можно определить из выражения:

$$y(p) = W(p) x(p) = 1/p(Tp + 1),$$

а оригинал выходного сигнала:

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p(Tp + 1)} \right] = 1 - e^{-t/T}.$$

Пусть постоянная времени T увеличилась на величину α : $T_\alpha = T + \alpha$. Определим динамическую погрешность, возникающую в результате этого изменения. Измененная передаточная функция имеет вид:

$$W_\alpha(p) = \frac{1}{(T + \alpha)p + 1}.$$

Найдем функцию чувствительности из выражения (6.20):

$$z(t, \alpha) = L^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{(T + \alpha)p + 1} \right) \cdot \frac{1}{p} \right] = L^{-1} \left[-\frac{1}{(Tp + 1)^2} \right] = -\frac{t}{T} e^{-t/T}.$$

Тогда искомую функцию динамической погрешности можно определить из (6.19):

$$\Delta y_{\text{дон}} = -\alpha \frac{t}{T} e^{-t/T}.$$

Методы теории чувствительности могут быть применены также и для случайных отклонений параметров от номинальных значений. Пусть α есть случайная величина, которая описывается математическим ожиданием $M(\alpha)$ и среднеквадратическим отклонением $S(\alpha)$. Тогда по аналогии со статическими расчетами имеем:

$$M(\Delta y_{\delta}) = z(t, \alpha) \cdot M(\alpha), \tag{6.22}$$

$$S(\Delta y_{\delta}) = \sqrt{[z(t, \alpha)S(\alpha)]^2} = |z(t, \alpha)| \cdot S(\alpha).$$

Следует отметить, что в данном случае теория чувствительности позволяет получить лишь приближенное решение, когда изменения параметра сравнительно малы. Однако для практических инженерных расчетов такая точность, как правило, является достаточной.

6.4 Расчет динамической погрешности при возмущающих воздействиях, ограниченных по модулю

Рассмотрим пути учета влияния возмущающих факторов на измерительное устройство, работающее в динамическом режиме. На практике часто о возмущениях, действующих на объект, имеется очень мало априорной информации. В этом случае обычно основываются на единственном предположении о максимально возможном значении воздействий, то есть ограничивают воздействие по модулю.

При такой постановке задачи расчета точности ее решение подразделяется на два этапа:

- определение наиболее неблагоприятного из возможных видов воздействия, вызывающего наибольшее отклонение сигнала на выходе устройства;
- расчет динамической погрешности устройства при найденном наиболее неблагоприятном виде воздействия.

Математическая формулировка задачи следующая:

Возмущающее воздействие $\eta(t)$ ограничено по модулю некоторым значением L :

$$|\eta(t)| \leq L. \quad (6.23)$$

Требуется из множества возможных функций $\eta(t)$, удовлетворяющих условию (6.23), найти наименее благоприятный вариант функции, приводящий к максимально возможной динамической погрешности, и вычислить это максимальное значение погрешности.

При неизменном входном сигнале $x(t) = \text{const}$ искомое значение вынужденной динамической погрешности будет определяться величиной выходного сигнала, вызванного возмущающим воздействием $\eta(t)$. Выходной сигнал можно определить с помощью интеграла свертки:

$$y(t) = \int_0^t \eta(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau. \quad (6.24)$$

Согласно данной формуле видно, что, по сути, определяется максимальное отклонение, накопленное за интервал времени от 0 до t .

Преобразуем (6.24) с учетом (6.23):

$$|y(t)| \leq \int_0^t |\eta(t-\tau) \cdot h(\tau)| d\tau \leq L \int_0^t |h(\tau)| d\tau. \quad (6.25)$$

Следовательно, искомое максимально возможное отклонение будет достигаться при таком входном сигнале $h(t)$, при котором $\eta(t-\tau) = L$, если $h(\tau) > 0$ и $\eta(t-\tau) = -L$, если $h(\tau) < 0$.

Таким образом,

$$y_{\max}(t) = L \int_0^t |h(\tau)| d\tau. \quad (6.26)$$

Если взять верхний предел интегрирования равным бесконечности, то можно найти предел максимально возможного значения выходного сигнала (динамической погрешности):

$$y_{\max_{\max}}(t) = L \int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau. \quad (6.27)$$

Кривая (6.27) называется *кривой накопления Булгакова*. Ее можно построить, если известна переходная характеристика $u(\tau)$.

$$h(\tau) = \frac{du(\tau)}{d\tau}.$$

На рис. 6.1 представлен пример построения кривой накопления Булгакова. На участке от 0 до τ_1 выполняется неравенство $du/d\tau > 0$, поэтому кривая накопления совпадает с переходной характеристикой. На интервале от τ_1 до τ_2 наблюдается $du/d\tau < 0$, поэтому участок BC' получается зеркальным отображением участка BC . На интервале от τ_2 до τ_3 имеет место $du/d\tau > 0$, поэтому участок $C'D'$ получился путем параллельного переноса участка CD переходной характеристики. Дальнейшее построение осуществляется аналогично.

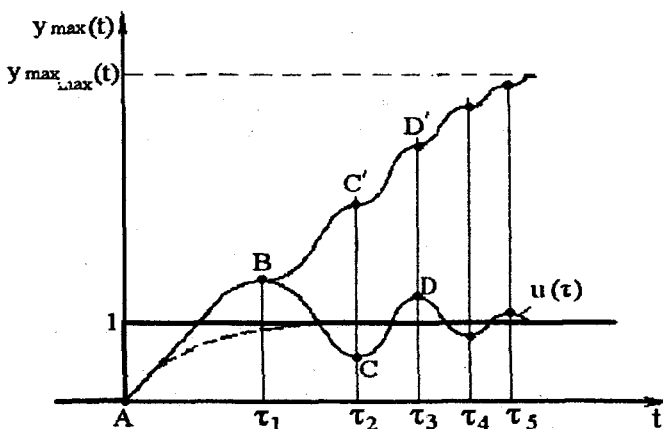


Рис. 6.1. Кривая накопления Булгакова

Полученная кривая характеризует рост максимально возможного накопленного отклонения в зависимости от времени. Можно сделать **вывод**: чем больше «колебательность» переходного процесса, тем больше тенденция к накоплению погрешности. В подтверждение сказанному пунктирной линией на рисунке представлена кривая накопления, практически совпадающая с графиком переходной характеристики.

7. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ

7.1 Общие подходы к анализу точности

Анализ точности измерительного устройства заключается, по существу, в определении его результирующей погрешности на основании информации о номинальных значениях и характеристиках точности размеров и параметров отдельных деталей, элементов, узлов, блоков и т.п. Проведенные ранее рассуждения позволяют применить для анализа принцип суперпозиции, хотя в каждом конкретном случае необходимо проводить обоснование корректности применения этого принципа, поскольку возможны ситуации, когда это применение не обеспечивает достоверных расчетов.

Сущность общего подхода к проведению анализа точности измерительного устройства заключается в следующем:

- на основе анализа схемы устройства и условий его работы выделяют принимаемые во внимание составляющие погрешности;
- рассчитывают указанные составляющие погрешности, проводят их анализ;
- суммируют составляющие погрешности определенным образом в соответствии с проведенным анализом и находят суммарную погрешность.

Анализируя представленное на рис. 1.3 выражение для обобщенной функции преобразования измерительного устройства в случае малых приращений параметров $\Delta \varepsilon$, Δq , $\Delta \eta$, Δv и пренебрегая величинами второго и больших порядков малости, с учетом рассмотрения вопроса в предыдущих главах можно записать:

$$\Delta y = \Delta y_{\text{сх}} + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \cdot \Delta \varepsilon + \frac{\partial y}{\partial q} \cdot \Delta q + \frac{\partial y}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \eta} \cdot \Delta \eta + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \Delta v + \Delta y_{\text{д}}. \quad (7.1)$$

Выражение (7.1) является обобщенным, в него входят отклонения параметров в векторной форме. В каждом конкретном случае необходимо проводить предварительно анализ отдельных составляющих с целью выбора наиболее приемлемого метода их учета.

Вопросы выделения составляющих погрешности и их определения рассмотрены в предыдущих главах. Здесь же остановимся подробнее на *методах суммирования составляющих погрешности*.

При суммировании отдельных составляющих необходимо, прежде всего, классифицировать их по признаку: являются ли они систематическими или случайными.

Следует отметить, что согласно современному подходу к расчету погрешностей с учетом основного постулата метрологии не рекомендуется использовать термин «систематическая погрешность», поскольку погрешность есть всегда величина случайная, которая может иметь математическое ожидание отличное от нуля или равное нулю. По своей сути систематическая составляющая погрешности – это и есть смещение центра группирования значений случайной погрешности от нуля, т.е. математическое ожидание погрешности.

При анализе необходимо помнить, что погрешность приближения, будучи теоретической погрешностью, имеет определенные, заранее известные значения для различных значений измеряемой величины в пределах диапазона. Поэтому при анализе ее следует суммировать алгебраически с математическими ожиданиями других составляющих погрешности.

Некоторые из составляющих погрешности, аналогично погрешности приближения, могут быть детерминированными, т.е. известными априори. Они также приведут к смещению центра группирования суммарной погрешности и должны при анализе суммироваться с математическими ожиданиями алгебраически.

В подавляющем большинстве случаев составляющие погрешности не известны. Имеется лишь информация о диапазонах изменения возможных их значений или о законах распределения вероятностей. В таких ситуациях подход к суммированию составляющих погрешности определяется задачами анализа, требуемой достоверностью расчетов и имеющейся априорной информацией.

При анализе могут использоваться следующие методы суммирования погрешностей.

7.2 Метод максимума-минимума

Применяется для оценки потенциально возможной предельной погрешности, которая может иметь место, но маловероятна. Результат расчета явно завышен, однако достоверность результата практически равна единице. При суммировании отдельных составляющих принимаются их максимально возможные значения, причем в неблагоприятных

ятных сочетаниях. Все составляющие считаются детерминированными и суммируются алгебраически. Сказанное относится к погрешности приближения, к частным погрешностям от несоответствия параметров номинальным значениям, к погрешностям от внутренних и внешних влияющих факторов и т.д.

Так, например, при реализации метода максимума-минимума все первичные погрешности принимаются за детерминированные, и им присваиваются максимально возможные значения, равные предельным отклонениям. В этом случае в качестве первичной погрешности принимают не любое из предельных отклонений. Из анализа функций преобразования с учетом знака коэффициента влияния выбирают наилучшие сочетания первичных погрешностей и определяют наибольшее и наименьшее значения суммарной погрешности для любого значения измеряемой величины в пределах диапазона.

Для нахождения максимального значения погрешности измерительного устройства в качестве первичных погрешностей берут наибольшие предельные отклонения для всех параметров, у которых коэффициенты влияния положительны, и наименьшие предельные отклонения для параметров с отрицательными коэффициентами влияния. Для нахождения минимального значения погрешности – наоборот, в качестве первичных погрешностей параметров с положительными коэффициентами влияния принимают наименьшие предельные отклонения, а параметров с отрицательными коэффициентами – наибольшие отклонения.

Обобщенное выражение для определения максимального или минимального значений погрешности при учете N первичных погрешностей и M влияющих факторов имеет вид:

$$\Delta y = \Delta y_{\text{сх}} + \sum_1^N \Delta y_{q_s} + \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^M \Delta y_{q_s}(\eta_j) + \Delta y_{\delta}. \quad (7.2)$$

При реализации метода максимума-минимума в качестве результата расчета рассматривается некоторый интервал (от минимального до максимального значения), в пределах которого может лежать значение суммарной погрешности.

Метод является наиболее простым и в результате этого находит широкое применение в практике инженерных расчетов, хотя и дает явно завышенный результат определения погрешности.

7.3 Метод вероятностного анализа

При реализации данного метода суммарная погрешность определяется из условия, что некоторые составляющие являются детерминированными, а некоторые случайными. Результирующая погрешность определяется как случайная величина, имеющая математическое ожидание (систематическую составляющую) и среднеквадратическое отклонение или дисперсию (случайную составляющую).

В этом случае детерминированные, т.е. известные составляющие погрешности, складываются с математическими ожиданиями случайной составляющей погрешности и определяют общую систематическую составляющую погрешности. Случайные составляющие суммируются по правилам суммирования случайных величин – находится среднеквадратическое значение суммарной составляющей погрешности, по которому рассчитывают размер доверительного интервала (с учетом вида закона распределения суммарной погрешности). При этом нахождение доверительного интервала производится в соответствии с рекомендациями, изложенными в п. 5.8.

Результат такого расчета в виде доверительного интервала позволяет оценить ожидаемое значение погрешности с принятой доверительной вероятностью, отличной от единицы. Выражение для суммарной погрешности при наличии детерминированных и случайных первичных погрешностей можно обобщенно представить в следующем виде (дополнительная погрешность также может быть случайной и описывается аналогично основной):

$$\Delta y = \underbrace{\Delta y_{cx} + \sum \Delta y_{q_{дет}} + \sum M(\Delta y_{q_{случ}})}_{\text{Математическое ожидание основной погрешности}} \pm t_{\alpha} \sqrt{\sum S^2(\Delta y_{q_{случ}})} + \underbrace{\Delta y_{дон}}_{\text{Дополнит. погрешн.}} + \underbrace{\Delta y_{д}}_{\text{Динамич. погрешн.}} \quad (7.3)$$

7.4 Метод ситуационного моделирования

Часто не представляется возможным установить статистические оценки первичной погрешности, поскольку либо не ясен технологический процесс финишной обработки, определяющий закон распределения погрешностей, либо нет сведений о законе распределения при известной технологии.

В этом случае применяется метод ситуационного моделирования, учитывающий дефицит априорной информации. Суть метода состоит в том, что законы математической статистики применяют для случайных величин, при этом, естественно, принимается ряд допущений и упрощений.

Так, например, каждый из внутренних параметров в конкретном экземпляре измерительного устройства при его изготовлении примет какое-то фиксированное действительное значение (на этапе проектирования оно не известно). Это приведет к тому, что в данном экземпляре измерительного устройства появится соответствующая частная погрешность, которую нельзя классифицировать как случайную, поскольку она будет иметь фиксированное значение, неизменное при многократных измерениях. Однако на этапе проектирования неизвестно значение этой погрешности, поэтому для ее учета принимают *неслучайную погрешность за случайную и используют изложенный выше математический аппарат анализа точности.*

Для реализации метода вводятся параметры, аналогичные соответствующим параметрам для случайных величин:

– координата середины поля допуска внутреннего параметра принимается за математическое ожидание первичной погрешности:

$$M^*(\Delta q) = E_0; \quad (7.4)$$

– поле допуска принимают за доверительный интервал E^* :

$$T_1 = E^*; \quad (7.5)$$

– вместо квантиля распределения t_p вводят некоторое значение коэффициента k , которое выбирают по договоренности любым числом ($t_p = k$);

– аналог среднеквадратического отклонения определяют из выражения:

$$S^*(\Delta q) = T_1 / k. \quad (7.6)$$

Расчеты погрешности производят по алгоритму вероятностного анализа, определяя аналог доверительного интервала суммарной по-

грешности путем умножения аналога ее среднего квадратического отклонения на ранее выбранное значение k .

$$\Delta y = M^*(\Delta y) \pm kS^*(\Delta y). \quad (7.7)$$

Пример. Двойной синусный механизм.

Определим методами максимума-минимума и ситуационного моделирования суммарную погрешность от несоответствия действительных размеров рычагов 1 (a) и 2 (b) двойного синусного механизма (рис. 5.12а) номинальным значениям при следующих конструктивных параметрах: $a = 4_{-0,004}^{+0,008}$, $b = 10_{-0,005}^{+0,010}$, $x = 0,5$ мм (расчет методом вероятностного анализа рассмотрен в п. 5.8).

Расчет методом максимума-минимума

1. Зададимся предельными значениями первичных погрешностей.

Из анализа выражения для расчетной характеристики преобразователя ($y = x \cdot b/a$) видно, что коэффициент влияния параметра a отрицательный, а параметра b – положительный. Поэтому для определения максимального значения погрешности следует принять: $\Delta a_{\max} = -0,004$ мм, $\Delta b_{\max} = 0,010$ мм, а для определения ее минимального значения: $\Delta a_{\min} = 0,008$ мм, $\Delta b_{\min} = -0,005$ мм.

2. Определим значения частных погрешностей, соответствующих заданным первичным погрешностям:

$$\Delta y_{\max a} = \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)_0 \cdot (\Delta a_{\max}) = -x \frac{b}{a^2} \cdot (\Delta a_{\max}) = -0,5 \frac{10}{4^2} \cdot (-0,004) = 0,00125 \text{ мм};$$

$$\Delta y_{\max b} = \left(\frac{\partial y}{\partial b} \right)_0 \cdot (\Delta b_{\max}) = x \frac{1}{a} \cdot (\Delta b_{\max}) = 0,5 \frac{1}{4} \cdot 0,010 = 0,00125 \text{ мм};$$

$$\Delta y_{\min a} = \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)_0 \cdot (\Delta a_{\min}) = -x \frac{b}{a^2} \cdot (\Delta a_{\min}) = -0,5 \frac{10}{4^2} \cdot 0,008 = -0,0025 \text{ мм};$$

$$\Delta y_{\min b} = \left(\frac{\partial y}{\partial b} \right)_0 \cdot (\Delta b_{\min}) = x \frac{1}{a} \cdot (\Delta b_{\min}) = 0,5 \frac{1}{4} \cdot (-0,005) = -0,00063 \text{ мм};$$

3. Определим максимальное и минимальное значения погрешности преобразователя:

$$\Delta y_{\max} = \Delta y_{\max a} + \Delta y_{\max b} = 0,00125 + 0,00125 = 0,0025 \text{ мм};$$

$$\Delta y_{\min} = \Delta y_{\min a} + \Delta y_{\min b} = -0,0025 - 0,00063 = -0,0031 \text{ мм}.$$

Таким образом, значение погрешности, определенное методом максимума-минимума, лежит в интервале $[-3,1; +2,5]$ мкм.

Расчет методом ситуационного моделирования

1. Определим параметры первичных погрешностей – аналоги статистических оценок. С учетом выражений (7.4) – (7.6) получим для $k=2$:

$$M^*(\Delta a) = E_0(a) = \frac{0,008 + (-0,004)}{2} = 0,002 \text{ мм};$$

$$M^*(\Delta b) = E_0(b) = \frac{0,010 + (-0,005)}{2} = 0,0025 \text{ мм};$$

$$S^*(\Delta a) = T_1(a)/k = \frac{0,008 - (-0,004)}{2 \cdot 2} = 0,003 \text{ мм};$$

$$S^*(\Delta b) = T_1(b)/k = \frac{0,010 - (-0,005)}{2 \cdot 2} = 0,00375 \text{ мм}.$$

2. Определим характеристики частных погрешностей:

$$M^*(\Delta y_a) = \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)_0 M^*(\Delta a) = -x \frac{b}{a^2} \cdot M^*(\Delta a) = -0,5 \frac{10}{4^2} \cdot 0,002 = -0,000625 \text{ мм};$$

$$S^*(\Delta y_a) = \left| \frac{\partial y}{\partial a} \right|_0 S^*(\Delta a) = x \frac{b}{a^2} \cdot S^*(\Delta a) = 0,5 \frac{10}{4^2} \cdot 0,003 = 0,000938 \text{ мм};$$

$$M^*(\Delta y_b) = \left(\frac{\partial y}{\partial b} \right)_0 M^*(\Delta b) = x \frac{1}{a} \cdot M^*(\Delta b) = 0,5 \frac{1}{4} \cdot 0,0025 = 0,000313 \text{ мм};$$

$$S^*(\Delta y_b) = \left| \frac{\partial y}{\partial b} \right|_0 S^*(\Delta b) = x \frac{1}{a} \cdot S^*(\Delta b) = 0,5 \frac{1}{4} \cdot 0,00375 = 0,000469 \text{ мм}.$$

3. Определим суммарную погрешность с учетом (7.7):

$$\Delta y = M^*(\Delta y) \pm k S^*(\Delta y) = M^*(\Delta y_a) + M^*(\Delta y_b) \pm k \sqrt{S^{*2}(\Delta y_a) + S^{*2}(\Delta y_b)}.$$

Подставив числовые значения, получим:

$$\Delta y = -0,000625 + 0,000313 \pm 2 \cdot \sqrt{(0,000938^2 + 0,000469^2)} = (-0,0003 \pm 0,0021) \text{ мм}.$$

Таким образом, значение погрешности, определенное методом ситуационного моделирования, лежит в интервале $[-2,4; +1,8]$ мкм.

Сравнивая результаты расчетов с результатами, полученными методом вероятностного анализа (см. п. 5.8), когда доверительный интервал с доверительной вероятностью 0,997 определялся как $[-3,1; +1,9]$ мкм, можно отметить, что метод максимума-минимума дает наибольший диапазон погрешности, который может быть уточнен методом вероятностного анализа, а в случае отсутствия необходимой априорной информации о характеристиках составляющих погрешности, методом ситуационного моделирования.

7.5 Определение суммарной погрешности устройства

В ряде случаев при выполнении анализа имеется информация о погрешностях преобразования отдельных блоков. Теория точности позволяет определить погрешность устройства по погрешности любого из n звеньев:

$$\Delta y = \sum_1^n \left(\frac{\partial y}{\partial y_i} \right) \Delta y_i, \quad (7.8)$$

где Δy_i – погрешность i -го звена.

Переходя к относительной погрешности, после преобразований получим:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_1^n \frac{\partial y}{\partial y_i} \cdot \frac{y_i}{y} \cdot \frac{\Delta y_i}{y_i}. \quad (7.9)$$

Введем обозначение безразмерного коэффициента влияния i -го звена β_i :

$$\beta_i = \left(\frac{\partial y}{\partial y_i} \right) \frac{y_i}{y}. \quad (7.10)$$

Тогда выражение (7.9) принимает вид:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_1^n \beta_i \cdot \frac{\Delta y_i}{y_i}. \quad (7.11)$$

Можно легко показать, что для элементов с пропорциональными (т.е. линейными) характеристиками относительное изменение сигналов можно преобразовать в относительное изменение чувствительности:

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \frac{\Delta S_i}{S_i}; \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta S}{S}. \quad (7.12)$$

Тогда выражение (7.11) принимает вид:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum \frac{\partial S}{\partial S_i} \cdot \frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum \beta_i \frac{\Delta y_i}{y_i}. \quad (7.13)$$

Сравнивая выражения (7.11) и (7.13), можно получить

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial S_i} \cdot \frac{S_i}{S}. \quad (7.14)$$

Таким образом, безразмерный коэффициент влияния погрешности i -ого преобразователя на суммарную погрешность измерительного устройства (для устройства с линейными преобразователями) может быть рассчитан как функция чувствительности звеньев.

Переходя к случайным величинам для независимых погрешностей отдельных звеньев, можно записать:

$$D = \sum_1^n \beta_i^2 \cdot D_i = \sum_1^n \left(\frac{\partial S}{\partial S_i} \cdot \frac{S_i}{S} \right)^2 \cdot D_i. \quad (7.15)$$

8. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Задача повышения точности измерительного устройства на этапе проектирования является комплексной и может решаться с использованием различных подходов и методов, которые подразделяются на следующие группы: конструктивно-технологические методы; структурные методы; методы комплексирования; методы оптимизации параметров. Одним из направлений повышения точности является применение компьютерных технологий измерения, когда за счет соответствующих специальных программ обработки результатов измерений и соответствующего алгоритма выполнения измерительных процедур добиваются существенного повышения точности и достоверности результатов измерений, а также выделяют необходимую информацию об исследуемых процессах, явлениях, величинах.

Следует отметить, что приведенная классификация методов является условной и получена на основе обобщения данных, представленных в различных источниках. Рассмотрим наиболее распространенные методы повышения точности измерительных устройств.

8.1 Конструктивно-технологические методы

Сущность указанных методов заключается в обеспечении условий наиболее точного изготовления отдельных деталей и элементов измерительного устройства, обеспечения стабильности его характеристик. К их числу относится, например, конструирование высокоточных узлов и элементов, инвариантных к действию внутренних дестабилизирующих факторов и внешних воздействий; применение материалов, обладающих высокой стабильностью свойств по отношению к указанным воздействиям; строгое соблюдение технологических требований при изготовлении деталей и элементов, при сборке, регулировке и юстировке устройства.

Важнейшим условием обеспечения точности измерительного устройства является соблюдение принципа совместимости элементов и узлов, под которой понимается сочетание их параметров, обеспечивающее требуемые характеристики функционирования всего устройства. Во внимание следует принимать следующие виды совместимости:

а) *конструктивная совместимость* – изготовление унифицированных деталей, элементов и узлов с определенными полями допусков, обеспечивающими их нормальную работу в устройстве;

б) *технологическая совместимость* – точное выполнение технологических процессов изготовления деталей и элементов, исключаящее взаимное влияние их друг на друга, обеспечение технологичности конструкции;

в) *материально-техническая совместимость* – выбор материалов деталей и элементов, при которых не возникают паразитные термоЭДС, вихревые токи, коррозия и т.п.;

г) *информационная совместимость* – обеспечение унифицированных входных и выходных параметров (токов, напряжений, давлений, расходов, скоростей, усилий и т.п.) элементов и узлов;

д) *метрологическая совместимость* – синтез измерительного устройства из элементов, вносящих примерно равные составляющие погрешности в суммарную погрешность устройства (из равноточных элементов).

Эффективность конструктивно-технологических методов повышения точности измерительных устройств ограничена. Это обусловлено тем, что каждое из изложенных выше мероприятий предполагает существенное повышение стоимости проектируемого объекта. Несколько повысить эффективность этих методов можно путем обеспечения полной или неполной взаимозаменяемости (групповой подбор, селективная сборка).

Еще одним направлением повышения точности является применение различных по конструкции регулировочных устройств – специальных элементов, обеспечивающих возможность изменения каких-либо параметров. Регулировочные устройства обычно применяют для устранения и регулирования зазоров и перекосов.

В случаях когда необходимо изменить в процессе регулировки значение параметра, входящего в функцию преобразования, применяют специальные конструктивные устройства, которые называют *компенсаторами*. С помощью компенсаторов снижают систематическую погрешность, обусловленную неточностью изготовления отдельных элементов. Компенсаторы позволяют значительно расширить допуски на регулируемые параметры, снизить требования к точности выполнения отдельных деталей и элементов. Применение компенсаторов приводит к некоторому усложнению конструкции и, соответст-

венно, к ее удорожанию. При этом положительный эффект от снижения требований к точности изготовления деталей и элементов существенно превышает эти дополнительные затраты.

8.2 Структурные методы

8.2.1 Классификация структурных методов

Структурные методы позволяют уменьшить влияние погрешностей отдельных звеньев (преобразователей) на выходной сигнал и таким образом построить измерительные устройства требуемой точности из элементов относительно невысокой точности. Данные методы применяются для компенсации как статических, так и динамических погрешностей. Они предполагают введение дополнительных (корректирующих) звеньев, что приводит к усложнению конструкции.

Структурные методы делятся на две группы.

Первая группа методов направлена на *стабилизацию реальной функции преобразования*. При их реализации в конструкцию вводятся корректирующие звенья, причем структура измерительного устройства в процессе измерения больше не изменяется. Таким образом, методы характеризуются постоянством структуры, неизменностью элементов, параметров элементов и связей между ними. Повышение точности достигается за счет корректирующих звеньев, которые в зависимости от схемы включения могут быть последовательными, параллельными и встречно-параллельными.

Ко второй группе относятся методы повышения точности измерительных устройств за счет *автоматической коррекции погрешности*. Методы основаны на принудительном изменении структуры устройства во времени.

Каждая группа методов может быть реализована различным образом. Рассмотрим некоторые типовые приемы и подходы.

8.2.2 Повышение точности с помощью последовательных и параллельных корректирующих звеньев

Повысить точность устройства, содержащего несколько звеньев, можно либо путем уменьшения погрешности этих звеньев, либо пу-

тем снижения влияния этих погрешностей на суммарную погрешность устройства. В свою очередь погрешность звена определяется его внутренними параметрами и внешними воздействиями. Поэтому повысить точность того или иного звена можно также двумя способами: повысить точность его изготовления путем комплекса конструктивно-технологических методов (п. 8.1) или снизить уровень возмущений, поступающих на него и приводящих к возникновению погрешности.

Для решения задачи снижения уровня возмущений часто применяют *последовательные корректирующие звенья*. Сущность метода заключается в том, что между возмущающими воздействиями и преобразователем измерительного устройства устанавливают последовательные корректирующие звенья, препятствующие прохождению воздействия до преобразователя (рис. 8.1). В качестве возмущающих воздействий выступают температура, изменение давления, нестабильность напряжения питания и др.

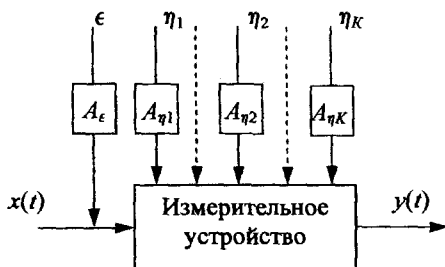


Рис. 8.1. Схема защиты измерительного устройства при использовании последовательных корректирующих звеньев

Пример 1. Системы термостатирования, применяемые для чувствительных элементов и преобразователей высокоточных приборов (генератор электронно-счетного частотомера конструктивно размещается в термостате, обеспечивающем поддержание с требуемой точностью заданной температуры платы генератора при флуктуациях температуры окружающей среды в широких пределах).

Пример 2. Системы стабилизации напряжения сетевого питания, применяемые практически во всех электроизмерительных приборах с

целью снижения уровня пульсаций и нестабильности напряжения питания измерительных цепей.

Пример 3. Системы амортизации, обеспечивающие защиту измерительного устройства или его преобразователей от ударов, вибраций, перегрузок (реализуются в виде различных конструкций ножек, специальных растяжек и подвесов и т.п.).

Пример 4. Системы экранирования электронных блоков и устройств, предназначенные для их защиты от электрических и магнитных полей.

Существенно повысить точность измерительного устройства в части снижения влияния внешних воздействий можно также путем применения *параллельных корректирующих звеньев* (рис. 8.2).

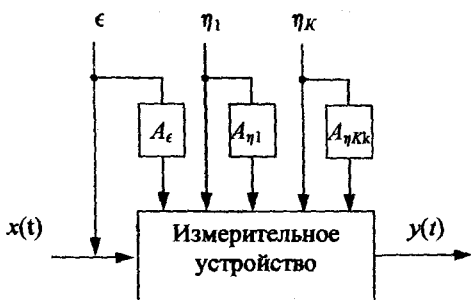


Рис. 8.2. Схема защиты измерительного устройства при использовании параллельных корректирующих звеньев

В этом случае в измерительном устройстве кроме естественного канала распространения внешнего воздействия создают специально другой параллельный канал, функцию преобразования которого реализуют таким образом, чтобы она была обратной функции преобразования основного канала. При этом осуществляется, так называемый, принцип инвариантности устройства к возмущениям.

Рассмотренный метод широко применяется при создании измерительных устройств. В качестве примеров можно рассмотреть различные дифференциальные, балансные, мостовые схемы включения преобразователей. В частности, на рис. 8.3 в качестве примера представлена схема включения рабочего R_{Tp} и компенсационного R_{Tk} тензоре-

зисторов в измерительную мостовую схему. Тензорезисторы расположены в одной камере, поэтому при изменении температуры внешней среды с точностью до идентичности их характеристик реагируют на это изменение одинаково. Включение тензорезисторов в смежные плечи измерительного моста приводит к тому, что изменение сопротивления рабочего преобразователя, вызванное изменением температуры (помеха), практически не оказывает влияния на показания отсчетного устройства PA .

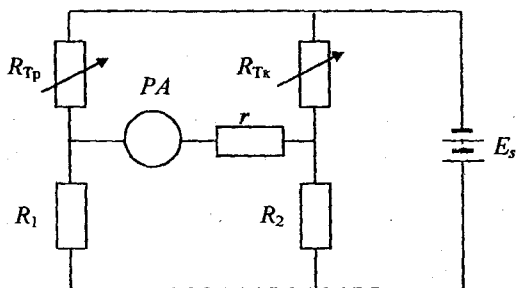


Рис. 8.3. Схема включения рабочего и компенсационного тензорезисторов в измерительную мостовую цепь

При использовании рассмотренных выше методов компенсируются лишь внешние возмущающие воздействия. Для снижения погрешности от нестабильности внутренних параметров преобразователей применяют другие методы. Так, например, при наличии существенной аддитивной погрешности преобразователя для снижения ее влияния на погрешность измерительного устройства используют *последовательные корректирующие звенья*, которые в данном случае устанавливают на пути входного сигнала (рис. 8.4).

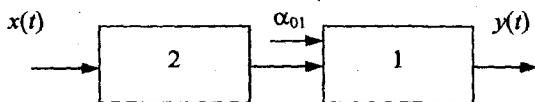


Рис. 8.4. Схема использования последовательного корректирующего звена: 1 — звено измерительной цепи; 2 — корректирующее звено

Пусть задано осуществить линейное преобразование вида: $y = kx$, где k – коэффициент преобразования или чувствительность. Входной элемент 1 имеет коэффициент преобразования k_1 и аддитивную погрешность, приведенное ко входу значение которой равно a_{01} .

Введем последовательное корректирующее звено, построенное на другом принципе и не имеющее аддитивной погрешности (с коэффициентом преобразования – k_2). Тогда при выполнении условия $k_1 k_2 = k$ получим:

$$y = x k_1 k_2 + a_{01} k_1 = k \left(x + \frac{a_{01}}{k_2} \right). \quad (8.1)$$

Из выражения (8.1) видно, что, уменьшая k_1 и увеличивая k_2 при выполнении условия $k_1 k_2 = k$, можно существенно снизить аддитивную составляющую погрешности.

Этот принцип используется, в частности, при включении усилительных каскадов переменного тока с демодуляцией сигнала перед усилителем постоянного тока.

8.2.3 Повышение точности с помощью встречно-параллельных корректирующих звеньев

Применение встречно-параллельных корректирующих звеньев (обратная связь) является одним из широко распространенных методов повышения стабильности и линейности характеристик измерительных устройств. Данный метод эффективен при условии

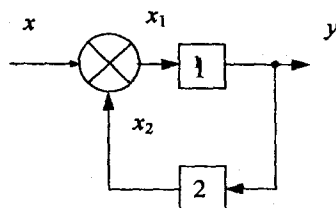


Рис. 8.5. Применение встречно-параллельных корректирующих звеньев

весьма точного элемента отрицательной обратной связи. Одно из основных направлений его использования – снижение мультипликативной погрешности основного преобразующего звена.

Пусть звено основной измерительной цепи 1 (рис. 8.5) имеет коэффициент преобразования k_1 и мультипликативную погрешность, приведенное ко входу значение которой равно $a_{01} + a_{11} x_1$. Звено обратной связи 2 имеет

коэффициент преобразования k_2 и погрешность $a_{02} + a_{12}y$.
Составим математическую модель данного устройства.

$$\begin{cases} y = k_1(x_1 + a_{01} + a_{11}x_1); \\ x_2 = k_2(y + a_{01} + a_{12}y); \\ x_1 = x - x_2. \end{cases} \quad (8.2)$$

Если бы преобразователи не имели погрешностей, то функция преобразования идеального устройства при встречно-параллельном соединении имела вид:

$$y_0 = \frac{k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad (8.3)$$

а погрешность:

$$\Delta y = y - y_0. \quad (8.4)$$

Преобразуя (8.2), получим выражение для функции преобразования устройства:

$$y = \frac{(1 + a_{11})k_1 x + k_1 a_{01} - k_1 k_2 a_{01} (1 + a_{11})}{1 + k_1 k_2 (1 + a_{11})(1 + a_{12})}. \quad (8.5)$$

Подставляя (8.3) и (8.5) в (8.4), получим:

$$\Delta y = k \left(a_{01} - \frac{a_{02}}{k} + \frac{a_{11}}{k_1 k_2} X - a_{12} X \right), \quad (8.6)$$

где $k = 1/k_2$.

Выражение получено при условиях:

$$k_1 k_2 \gg 1; \quad a_{11} \ll 1; \quad a_{12} \ll 1.$$

Анализ (8.6) показывает, что на выход измерительного устройства практически без ослабления поступает аддитивная составляющая погрешности звена 1 основной измерительной цепи a_{01} , и мультиплика-

тивная составляющая погрешности звена 2 обратной связи a_{12} . В то же время существенно ослабляется (в $k_1 k_2$ раз) мультипликативная составляющая погрешности звена 1 основной измерительной цепи и несколько снижается аддитивная погрешность a_{02} .

Таким образом, для снижения мультипликативной составляющей погрешности звена основной цепи необходимо обеспечить пренебрежимо малые значения погрешности звена обратной связи, при этом аддитивную погрешность элемента основной цепи данный метод практически не снижает.

При необходимости снижения как аддитивной, так и мультипликативной составляющих погрешности элемента основной цепи следует наряду с высокоточным звеном обратной связи 2 последовательно с элементом 1 включить соответствующее корректирующее звено 3 (рис. 8.6).

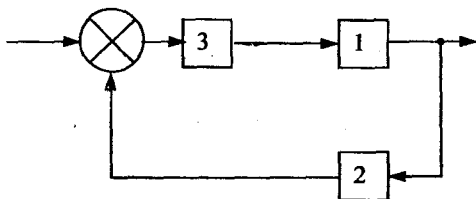


Рис. 8.6. Совместное использование последовательного и встречно-параллельного корректирующих звеньев

Для представленного устройства при условии $a_{03} = a_{02} = a_{01} = 0$, выражение для погрешности имеет вид:

$$\Delta y = k \left[\frac{x(a_{11} + a_{13})}{k_1 k_2 k_3} + \frac{a_{01}}{k_3} \right].$$

8.2.4 Методы автоматической коррекции погрешностей

Основной принцип методов данной группы заключается в следующем: измерив выходной сигнал и определив каким-то образом погрешность измерительного устройства, воздействовать на его функ-

цию преобразования с целью ее изменения и компенсации погрешности.

Существует целый ряд подходов к решению этой задачи.

Метод вспомогательных измерений

Измерительный сигнал на входе и внутри измерительного устройства зашумляется помехами, которые приводят к изменению реальной функции преобразования. Данный метод основывается на измерении с помощью дополнительных измерительных устройств (ДИУ) (рис. 8.7) значений воздействующих факторов (температуры, давления, влажности и т.п.) и выработке с помощью вычислительного устройства (ВУ) соответствующих корректирующих сигналов, которые, воздействуя на основное измерительное устройство (ОИУ), изменяют соответствующим образом его функцию преобразования.

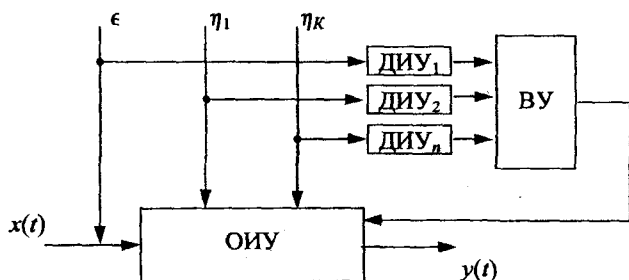


Рис. 8.7. Схема реализации метода вспомогательных измерений

Сложность этого подхода заключается в том, что необходимо иметь достоверную априорную информацию о функциях влияния возмущающих воздействий на погрешность.

Метод обратного преобразования

Сущность метода заключается в том, что корректирующий сигнал вырабатывается исходя из погрешности измерительного устройства, приведенной ко входу. Входной сигнал x (рис. 8.8) поступает на вход измерительного устройства (ИУ) и на вход сравнивающего устройства (СУ). Выходной сигнал y , содержащий некоторую погрешность, поступает на образцовый обратный преобразователь (ООП). На выходе ООП формируется номинальное значение входного сигнала $x_{н}$, которое соответствует реальной функции y в случае отсутствия погреш-

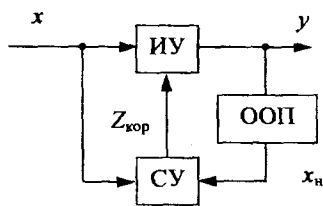


Рис. 8.8. Схема реализации метода обратного преобразования

ности преобразования ИУ. Поскольку погрешность преобразований присутствует, то $x - x_n \neq 0$.

Сравнивающее устройство СУ в зависимости от результатов сравнения x и x_n вырабатывает корректирующий сигнал:

$$Z_{\text{кор}} = f(x - x_n).$$

Корректирующий сигнал воздействует на функцию преобразования

ИУ, изменяя ее до выполнения условия: $x = x_n$.

При данном условии можно утверждать, что измерительное устройство не имеет погрешности. Точность этого утверждения определяется точностью ООП и порогом чувствительности СУ.

Метод образцовых сигналов

Измерительные устройства имеют тенденцию изменять свои параметры с течением времени. Причиной этого является износ для механических преобразователей, старение материалов и изменение их свойств, изменение параметров источника питания и т.п. Указанные явления приводят к появлению и изменению погрешности преобразования с течением времени. Поэтому для поддержания требуемой точности в некоторых измерительных устройствах используется периодическая подстройка параметров. В ряде случаев процедуру осуществляют вручную, но возможна и автоматическая подстройка.

Метод образцовых (тестовых) сигналов заключается в том, что измерительное устройство периодически отключают от источника

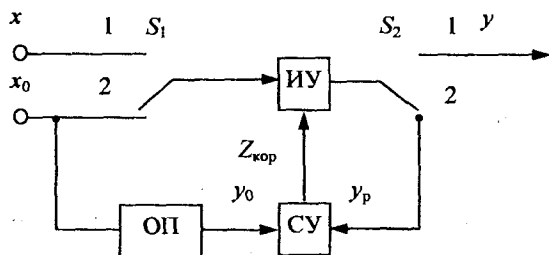


Рис. 8.9. Схема реализации метода образцовых сигналов

сигнала и подключают к цепи коррекции. Сущность метода поясняется схемой, представленной на рис. 8.9.

При работе измерительного устройства (ИУ) переключатели S_1 и S_2 установлены в положение 1, что соответствует преобразова-

нию измеряемого сигнала x в выходной сигнал y . Для проведения коррекции переключатели S_1 и S_2 переводят в положение 2 (показано на рис. 8.9). В этом случае на вход ИУ подается образцовый сигнал x_0 , который проходит по двум каналам:

- через ИУ и поступает на первый вход сравнивающего устройства (СУ) в виде некоторого сигнала y_p ;
- через образцовый преобразователь (ОП) и поступает на второй вход СУ в виде сигнала y_0 .

Поскольку измерительное устройство имеет погрешность, то $y_p = f_p(x_0)$ отличается от $y_0 = f_0(x_0)$ и, в общем, случае $y_p \neq y_0$. Сравнивающее устройство СУ вырабатывает корректирующее воздействие $Z_{кор}$, которое является функцией этой разности: $Z_{кор} = f(y_0 - y_p)$. Данное воздействие изменяет функцию преобразования измерительного устройства до выполнения условия: $y_0 = y_p$.

Рассмотрим несколько примеров реализации данного метода

Пример 1. Компенсатор постоянного тока.

Компенсаторы широко применяются для точного измерения ЭДС и напряжений. Схема прибора представлена на рис. 8.10. При измерении неизвестного значения E_x переключатель S_n устанавливают в положение 2 и путем регулировки R добиваются нулевых показаний нуля индикатора НИ. Согласно второму уравнению Кирхгофа для контура I:

$$E_x = R_x \cdot i_p,$$

где i_p – рабочий ток.

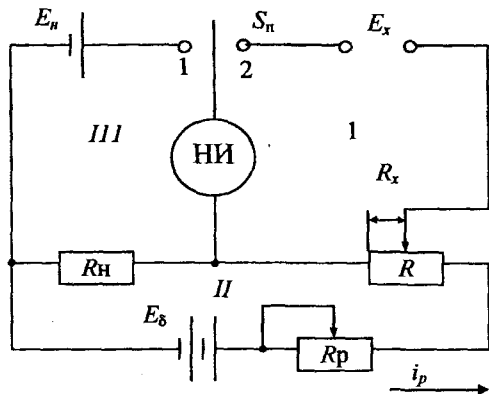


Рис. 8.10. Схема компенсатора постоянного тока

В качестве R используют многозначную меру сопротивления, поэтому точность измерения E_x определяется, в основном, стабильностью рабочего тока. С течением времени значение i_p может изменяться, что приводит к погрешности прибора. Для компенсации данной погрешности периодически производят регулировку прибора с помощью метода образцовых сигналов.

Для этого в схеме предусмотрен дополнительный контур III , включающий нормальный элемент E_n (мера ЭДС) и образцовое сопротивление R_n (мера сопротивления). При регулировке переключатель S_n устанавливается в положение 1 и путем регулировки R_p добиваются нулевых показаний НИ. С помощью этой процедуры осуществляют корректировку рабочего тока прибора i_p .

Запишем второе уравнение Кирхгофа для контура III в момент нулевых показаний НИ:

$$E_n = i_p \cdot R_n,$$

тогда $i_p = E_n / R_n$.

Поскольку E_n и R_n для прибора постоянны и стабильны (значения, воспроизводимые мерами), то значение i_p устанавливается с высокой степенью точности, а шкалу R_x градуируют непосредственно в единицах напряжения.

Пример 2. Электрический терморезистивный термометр.

В электрическом термометре, схема которого представлена на рис. 8.11, значения сопротивлений в плечах измерительного мостового преобразователя выбирают таким образом, чтобы при температуре, равной нижнему пределу измерения ($t = t_n$), мост был бы сбалансирован. При этом выполняется условие: $R_1 R_3 = R_2 R_{t=t_n}$. Чувствительность прибора настраивают таким образом, чтобы при температуре, равной верхнему пределу измерений ($t = t_v$), положение указателя соответствовало бы предельному значению шкалы.

Ввиду нестабильности значений параметров элементов схемы, в частности элементов питания, возможно изменение чувствительности прибора и формирование соответствующей погрешности.

Для компенсации погрешности вводят цепь коррекции в виде образцового сопротивления R_k и переключателя S . Значение R_k задают равным R_t при $t = t_v$. Периодически переводя переключатель S из по-

ложения 1 в положение 2, отключают от измерительной цепи датчик R_t и подключают образцовое сопротивление R_x . Если указатель не отклоняется до предельной отметки шкалы, то регулируют напряжение питания с помощью R_p до тех пор, пока указатель не совместится с соответствующей отметкой шкалы.

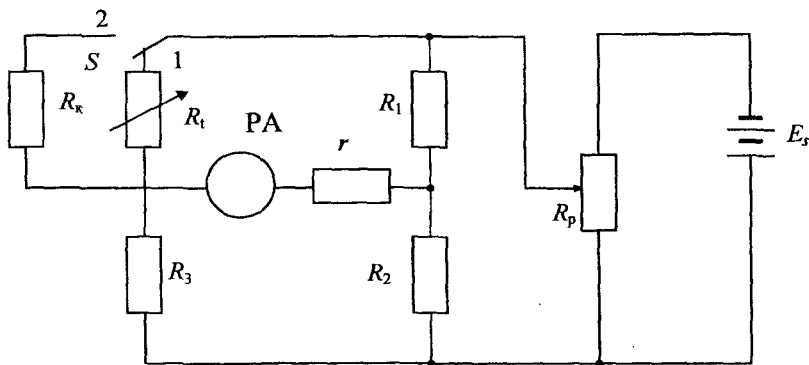


Рис. 8.11. Схема электрического термометра

8.2.5 Структурные методы повышения динамической точности

Для повышения динамической точности существует целый комплекс структурных методов класса линейных и нелинейных систем, которые рассматриваются в теории автоматического управления и регулирования. Применительно к измерительным устройствам решается задача воспроизведения измерительного сигнала $x(t)$ с наибольшей динамической точностью и эффективной фильтрацией помех.

Рассмотрим наиболее широко применяемые методы коррекции на примере последовательных корректирующих звеньев. Их сущность заключается в том что, последовательно измерительной цепи, запаздывание которой характеризуется передаточной функцией $W(p)$, устанавливается форсирующий фильтр, компенсирующий запаздывание

основной цепи. При этом передаточную функцию фильтра W_ϕ рассчитывают из условия:

$$W_\phi(p) = \frac{W_0(p)}{W(p)}, \quad (8.7)$$

где $W_0(p)$ – желаемая передаточная функция измерительного устройства.

Легко показать, что при выполнении (8.7) передаточная функция всего устройства будет соответствовать желаемой функции:

$$W_\Sigma(p) = W(p) \cdot W_\phi(p) = W(p) \frac{W_0(p)}{W(p)} = W_0(p) \quad (8.8)$$

Заметим, что полная компенсация на практике никогда не осуществляется, хотя бы из-за ограничений выходной мощности и невозможности идеального дифференцирования.

Пример. Компенсация запаздывания термоэлектрического датчика, преобразующего температуру в ЭДС в соответствии с уравнением:

$$T_1 e + e = S_T \Theta, \quad (8.9)$$

где Θ – температура;

e – ЭДС;

S_T – чувствительность термопары;

T_1 – постоянная времени термопары.

Согласно приведенному выше дифференциальному уравнению передаточная функция преобразователя имеет вид:

$$W(p) = \frac{S_T}{T_1 p + 1}. \quad (8.10)$$

Ставится задача: путем последовательного корректирующего звена снизить запаздывание при измерении температуры.

Один из приемов решения задачи заключается в подключении термопары ко входу операционного усилителя с форсированной характеристикой (рис. 8.12).

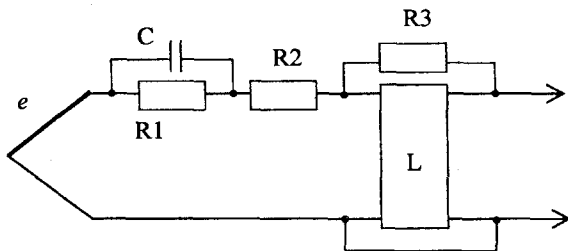


Рис. 8.12. Схема измерительного устройства

В этом случае:

$$W_{\phi}(p) = \frac{k_2(T_2 p + 1)}{k_3 T_2 p + 1}, \quad (8.11)$$

где $T_2 = R_1 C$ – постоянная времени;

$k_2 = \frac{R_3}{R_1 + R_2}$ – характеристика обратной связи;

$k_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$ – коэффициент преобразования делителя напряжения;

R_2 – вводится для устойчивой работы усилителя.

Если R_1 и C задать таким образом, чтобы выполнялось условие $T_1 = T_2$, то передаточная функция всего устройства будет иметь вид:

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{k_2 S_T}{T_1 k_3 p + 1}. \quad (8.12)$$

Анализ выражения (8.12) показывает, что $T_1 k_3 \ll T_1$. Таким образом, задача компенсации запаздывания может считаться решенной.

8.3 Методы комплексирования

Одним из направлений повышения точности измерительных устройств является объединение в одно комплексное устройство (КИУ) нескольких компонентов – первичных измерительных устройств (ПИУ), предназначенных для измерения одной и той же величины (возможно объединение измерительных устройств, измеряющих взаимосвязанные величины).

Возможно два подхода к построению КИУ. Один из них заключается в автоматической обработке сигналов компонентов по определенному алгоритму с помощью устройств обработки информации (УОИ), в качестве которых обычно используются микропроцессоры. Второй подход заключается в соединении компонентов в соответствии с определенной учитывающей их свойства структурой (например, разные динамические характеристики, спектры помех и т.п.).

Рассмотрим методы, реализующие первый подход. В простейшем случае компоненты могут быть совершенно одинаковыми по схеме и конструкции, а положительный эффект достигается за счет определения УОИ среднего арифметического значения результатов измерений, получаемых различными ПИУ. В данном случае аппаратными средствами реализуются многократные измерения, точность которых в \sqrt{n} раз выше, где n – число ПИУ. Следует отметить, что усреднение результатов при комплексировании имеет принципиальное преимущество по сравнению с обычными многократными измерениями, проводимыми последовательно с помощью одного измерительного устройства. Оно заключается в обеспечении возможности анализа быстро изменяющихся процессов.

Более сложный случай комплексирования – объединение в КИУ нескольких ПИУ, имеющих одинаковое назначение, но отличающихся по точности. В этом случае вместо вычисления среднего арифметического вычисляют средневзвешенное значение, причем соотношения весовых коэффициентов обратно пропорциональны соотношения дисперсий погрешностей компонентов.

Еще более сложный случай комплексирования – сочетание нескольких компонентов, измеряющих одну и ту же величину, но имеющих не только различную точность, но и различные динамические характеристики, различную чувствительность к влияющим факторам и т.п. При этом избыточная информация обрабатывается таким

образом, чтобы проявлялись только положительные свойства компонентов.

Пример. Навигационная курсовая система самолета, предназначенная для определения его курса.

Система содержит магнитоиндукционный компас, радиокompас, гиropолукомпас, астороориентатор, доплеровский измеритель угла сноса. Каждый из указанных приборов имеет погрешности: магнитный компас имеет большие погрешности вблизи полюсов Земли, радиокompас подвержен влиянию радиопомех, астороориентатор не эффективен в условиях плохой видимости, гиropолукомпас обладает погрешностью, нарастающей во времени, доплеровский измеритель угла сноса не работает при больших кренах.

Комплексирование указанных компонентов с автоматической обработкой получаемой избыточной информации позволяет достичь заданной точности при различных условиях эксплуатации объекта. Следует отметить, что в алгоритм обработки вводится логическая операция, сущность которой заключается в сравнении результатов измерений, поступающих с различных компонентов, и исключения сигналов, существенно отличающихся от других.

Ко второй группе КИУ относятся устройства, в которых структура учитывает свойства компонента. Чаще всего компонентов бывает два, при этом возможны следующие варианты комплексирования:

- на компоненты 1 и 2 изменения параметров окружающей среды оказывают противоположное влияние;

- компонент 1 имеет большой диапазон измерения и невысокую точность, компонент 2 малый диапазон измерений при высокой точности (могут использоваться несколько компонентов, диапазон измерения каждого из которых соответствует части требуемого диапазона измерения КИУ);

- компонент 1 осуществляет непрерывные измерения с невысокой точностью, а компонент 2 выполняет точные измерения дискретно во времени или в определенных точках диапазона;

- компонент 1 обладает хорошей статической точностью при невысоких динамических характеристиках, а компонент 2 – наоборот, хорошей динамической точностью при ограниченных статических характеристиках.

8.4 Оптимизация значений параметров

Одним из направлений повышения точности измерительных устройств на этапе их проектирования является задание рациональных значений параметров деталей, элементов, узлов и блоков, обеспечивающих наименьшую погрешность устройства в пределах его диапазона измерений. Эффективность данного метода не вызывает сомнений и была проиллюстрирована в п. 4.3.

Принимая во внимание, что суммарная погрешность измерительного устройства имеет целый ряд различных составляющих (закономерная, случайная, основная, дополнительная и т.п.), является очевидным, что невозможно решить проблему выбора значений параметров, являющихся наилучшими с точки зрения минимизации погрешности вообще. Тем более, погрешность является функцией измеряемой величины в пределах диапазона.

Значения параметров, обеспечивающие наименьшую погрешность при каком-либо значении измеряемой величины, могут привести к существенной погрешности при ее другом значении. При этом точность устройства, ограничиваемая максимальным значением погрешности в пределах диапазона, может быть невысокой.

Поэтому в зависимости от задачи расчета выбирают тот или иной критерий, согласно которому и проводят оптимизацию. Ранее был рассмотрен критерий оптимизации параметров по критерию минимума погрешности приближения. Существует ряд других критериев. Рассмотрим некоторые из них.

8.4.1 Критерий минимума математического ожидания погрешности

Математическое ожидание суммарной погрешности представляет собой систематическую составляющую погрешности. При выполнении определенных условий данная составляющая может быть существенно уменьшена, сведена к минимуму, а в ряде случаев и полностью скомпенсирована.

Выражение для математического ожидания погрешности можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 M(\Delta y) = M_1 + M_2 + M_3 = & \underbrace{M[f(x, q_s) - f_0(x)]}_{M_1} + \\
 & + \underbrace{\sum \left[\left(\frac{\partial y}{\partial q_s} \right)_0 \cdot M(\Delta q_{s \text{ случ}}) \right]}_{M_2} + \sum \left(\frac{\partial y}{\partial q_s} \right)_0 \cdot \Delta q_{s \text{ лет}} + \\
 & + \underbrace{\sum \left(\frac{\partial y}{\partial q_s} \right)_0 \sum \left[\left(\frac{\partial q_s}{\partial \eta_{oi}} \right)_0 \cdot M(\Delta \eta) \right]}_{M_3},
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

где M_1 – характеризует погрешность приближения;

M_2 – математическое ожидание погрешности от несоответствия параметров номинальным значениям;

M_3 – математическое ожидание погрешности от влияющих факторов.

Большая часть входящих в формулу (8.13) величин являются функциями измеряемой величины x . Если бы удалось выбрать параметры таким образом, чтобы при всех возможных x и $\Delta \eta_j$ суммарная погрешность $M(\Delta y) = 0$, то удалось бы решить задачу полной компенсации систематической погрешности.

Пути решения такой задачи:

– выбор параметров $q_1, q_2, \dots, q_s, \dots, q_N$ и коэффициентов $\frac{\partial y}{\partial q_s}$;

$\frac{\partial q_s}{\partial \eta_j}$;

– введение в схему устройства специальных конструктивных элементов – компенсаторов, которые автоматически вносят поправку в выходной сигнал с целью компенсации систематической погрешности.

В общем случае $M(\Delta y) = f(x)$, поэтому и компенсаторы должны вносить поправку, функционально зависимую от входной величины x . Существуют компенсаторы, которые решают эту задачу и вносят поправку, изменяющуюся в функции x практически по любому закону. Теория компенсаторов – раздел теории точности. В специальной литературе рассматриваются вопросы определения необходимого и достаточного количества компенсаторов, наиболее рационального места

их установки, расчета необходимых параметров и т.п. В данном пособии ввиду ограниченности объема этот вопрос более подробно не рассматривается.

Однако в полном объеме скомпенсировать погрешность во всем диапазоне обычно не удается. Тогда проводят оптимизацию параметров, принимая за основу некоторые комплексные критерии, позволяющие одним числом, независимо от измеряемой величины, оценить систематическую погрешность во всем диапазоне.

Таким критерием может быть, например, *максимальное значение* или *интеграл квадрата погрешности* при изменении x во всем диапазоне. По существу, второй критерий – это аналог среднего квадратического значения случайной погрешности.

Рассмотрим математическое ожидание погрешности как разность между расчетной и заданной характеристиками устройства:

$$M(\Delta y) = M[y(x, q_S) - y_0(x)].$$

Определим параметры q_S из условия минимума интегрального параметра J функции математического ожидания погрешности в диапазоне измерения устройства $[x_{\min}; x_{\max}]$:

$$J = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} M^2(\Delta y) \cdot dy. \quad (8.14)$$

Исследуя (8.14) на экстремум, получим условия определения параметров q_S в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial J}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial q_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial J}{\partial q_S} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial J}{\partial q_N} = 0. \quad (8.15)$$

Пример. Определить значения параметров a , b , c квадратичной функции преобразователя измерительного устройства: $y = ax^2 + bx + c$ при его заданной линейной характеристике: $y_0 = kx$ из условия минимума математического ожидания погрешности.

Составим выражение для интегральной характеристики J :

$$J = \int_0^{x_1} (ax^2 + bx + c - kx)^2 dx =$$

$$= a^2 x_1^5 / 5 + a(b-k)x_1^4 / 2 + [(b-k)^2 - 2ac]x_1^3 / 3 + (bc - ak)x_1^2 + c^2 x_1.$$

С учетом (8.15) условия выбора параметров можно представить в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a} = 2ax_1^5 / 5 + (b-k)x_1^4 / 2 - 2cx_1^3 / 3 - kx_1^2 = 0; \\ \frac{\partial J}{\partial b} = ax_1^4 / 2 + 2(b-k)x_1^3 / 3 + cx_1^2 = 0; \\ \frac{\partial J}{\partial c} = -2ax_1^3 / 3 + bx_1^2 + 2cx_1 = 0. \end{cases} \quad (8.16)$$

Решение системы уравнений (8.16) относительно неизвестных параметров не представляет сложности. При более сложных выражениях, очевидно, потребуются применение ЭВМ.

8.4.2 Критерий минимума дисперсии случайной погрешности

Случайная погрешность является наиболее неблагоприятной составляющей погрешности, поскольку ее гораздо сложнее компенсировать.

Математическая формулировка задачи минимизации случайной погрешности состоит в следующем: пусть задана общая требуемая чувствительность прибора \hat{S} , необходимо так распределить чувствительность между отдельными элементами, случайная погрешность каждого из которых характеризуется дисперсией D_i , чтобы общая погрешность имела минимально возможное значение.

Задача решается следующим образом:

– задается условие равенства общей чувствительности заданному значению:

$$\varphi = \hat{S} - f(S_1, \dots, S_n) = 0; \quad (8.17)$$

– вводится неопределенный множитель λ и составляется новая функция с учетом полученного ранее уравнения (7.15):

$$F = D + \lambda \varphi = \sum \left(\frac{\partial S}{\partial S_i} \right)^2 \left(\frac{S_i}{S} \right)^2 D_i + \lambda [\bar{S} - f(S_1, \dots, S_n)]; \quad (8.18)$$

– функция F исследуется на экстремум, для чего приравнивают нулю частные производные от F по S_i ;

– решают полученную систему $n + 1$ уравнений с учетом условия равенства чувствительности прибора заданному значению. При решении исключается λ и определяется оптимальное значение $S_{i \text{ опт}}$;

– определяют минимальное значение D_{\min} путем подстановки в (7.15) оптимальных значений $S_{i \text{ опт}}$.

Общая чувствительность схемы является функцией чувствительности отдельных звеньев, причем вид этой функции зависит от их соединения. Рассмотрим несколько примеров для типовых соединений линейных звеньев:

1. Последовательное соединение звеньев.

При последовательном соединении

$$S = \prod S_i; \quad \beta_i = \left(\frac{\partial S}{\partial S_i} \right) \frac{S_i}{S} = 1.$$

Значит, дисперсия погрешности последовательно соединенных звеньев равна сумме дисперсии отдельных элементов:

$$D = \sum_1^n D_i.$$

Таким образом, при последовательном соединении линейных звеньев минимизация случайных погрешностей за счет перераспределения чувствительности звеньев не представляется возможной. Уменьшение дисперсии можно добиться либо за счет повышения точности отдельных звеньев (уменьшение D_i), либо за счет упрощения схемы (уменьшения числа звеньев n).

2. Параллельное согласное соединение звеньев

При параллельном соединении:

$$S = \sum S_i; \quad \beta_i = \left(\frac{\partial S}{\partial S_i} \right) \frac{S_i}{S} = \frac{S_i}{S}.$$

Если общая чувствительность задана ($S = \bar{S}$), то можно записать:

$$\beta_i = S_i / \bar{S}.$$

При этом добавочное условие имеет вид:

$$\varphi = \bar{S} - \sum S_i = 0.$$

Составим композиционную функцию F :

$$F = \frac{1}{\bar{S}^2} \sum S_i^2 D_i + \lambda (\bar{S} - \sum S_i).$$

Дифференцируя F по S_i и приравнявая нулю частные производные, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial S_1} = \frac{2S_1 D_1}{\bar{S}^2} - \lambda = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial S_2} = \frac{2S_2 D_2}{\bar{S}^2} - \lambda = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial S_n} = \frac{2S_n D_n}{\bar{S}^2} - \lambda = 0. \end{array} \right.$$

Преобразуем полученные выражения:

$$2S_1 D_1 = \lambda \bar{S}^2; \quad S_1 / S_i = D_i / D_1;$$

$$2S_2 D_2 = \lambda \bar{S}^2; \quad S_2 / S_i = D_i / D_2;$$

.....

$$2S_n D_n = \lambda \bar{S}^2; \quad S_n / S_i = D_i / D_n;$$

$$\bar{S}^2 = S_1 + S_2 + \dots + S_n;$$

$$S_i \left(\frac{S_1}{S_i} + \frac{S_2}{S_i} + \dots + \frac{S_n}{S_i} \right) = \bar{S}^2;$$

$$S_i \left(\frac{D_1}{D_i} + \frac{D_2}{D_i} + \dots + \frac{D_n}{D_i} \right) = \bar{S}^2;$$

$$S_{i_{\text{опт}}} = \frac{\hat{S}^2}{D_i \sum \frac{1}{D_j}}$$

Для определения минимальной дисперсии при параллельном согласном соединении подставим значение $S_{i_{\text{опт}}}$ в выражение для дисперсии. После преобразований получим:

$$\frac{1}{D_{\text{min}}} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \dots + \frac{1}{D_n}$$

Таким образом, при параллельном соединении звеньев и обеспечении оптимальных значений их чувствительности общая дисперсия меньше дисперсии любого звена, то есть при оптимальном распределении чувствительности измерительное устройство обладает более высокой точностью (в смысле случайной погрешности), чем любое звено, входящее в его состав. Это позволяет строить высокоточные измерительные цепи из компонентов с ограниченной точностью и положено в основу метода комплексирования, применяемого при создании высокоточных систем.

В частном случае при использовании n одинаковых преобразователей:

$$D_{\text{min}} = \frac{D}{n}$$

3. Параллельное встречное соединение звеньев

Для отрицательной обратной связи можно записать, что:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \frac{S_1}{1 + S_1 S_2} = \frac{k_0}{S_2 (1 + k_0)}; \\ \beta_1 &= \frac{1}{1 + S_1 S_2} = \frac{1}{1 + k_0}; \beta_2 = -\frac{S_1 S_2}{1 + S_1 S_2} = -\frac{k_0}{1 + k_0}; \\ k_0 &= S_1 S_2. \end{aligned}$$

Общая дисперсия определяется следующим образом:

$$D = \frac{D_1}{(1 + k_0)^2} + \frac{D_2 k_0^2}{(1 + k_0)^2}$$

Дифференцируя полученное выражение по k_0 и приравнявая к нулю, определим:

$$k_0 = D_1 / D_2.$$

Вывод: введение глубокой отрицательной обратной связи целесообразно в тех случаях, когда точность обратного преобразователя намного выше точности преобразователя прямой цепи.

Найдем оптимальные значения чувствительности звеньев:

$$S_1 = \hat{S} \frac{D_1 + D_2}{D_2}; \quad S_2 = \frac{1}{\hat{S}} \frac{D_1}{D_1 + D_2}.$$

При этом минимальная дисперсия определяется аналогично случаю параллельного согласного соединения:

$$\frac{1}{D_{\min}} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}; \quad D_{\min} = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}.$$

8.4.3 Критерии динамической точности прибора

Оптимальные параметры устройства, работающего в динамическом режиме и, соответственно, описываемого дифференциальным уравнением, могут быть определены из условия минимума динамической погрешности. Погрешность передаточной функции описывается выражением:

$$\Delta W(p) = W(p) - W(0),$$

где $W(p)$ – реальная, а $W(0)$ – требуемая передаточные функции.

Разложим $\Delta W(p)$ в ряд по степеням p :

$$\Delta W(p) = W'(0) \frac{p}{1!} + W''(0) \frac{p^2}{2!} + \dots,$$

где W' , W'' – производные функции $W(p)$ по p .

Для сравнительно медленных процессов, когда p мало, ряд сходится. Динамическая погрешность становится равной нулю при условии, что эти производные равны нулю:

$$W'(0) = 0; \quad W''(0) = 0.$$

Составляя систему уравнений по числу неизвестных параметров, можно, таким образом, существенно снизить динамическую погрешность путем решения системы и подстановки оптимальных значений параметров в передаточную функцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аруцов Ю.А. Конструирование и расчет механических систем контрольно-измерительных приборов: Учебное пособие.- Л.: СЗПИ, 1988. – 88 с.
2. Боднер В.А. Измерительные приборы: Учебник для вузов: в 2 т. / В.А. Боднер, А.В. Алферов. – М: Изд-во стандартов, 1986.
3. Браславский Д.А. Точность измерительных устройств / Д.А. Браславский, В.В. Петров. – М.: Машиностроение, 1976. – 312 с.
4. Галибей Н.И. Прикладная механика автоматических систем: Учебное пособие. – Красноярск: Изд-во Красноярского университета, 1988. – 440 с.
5. Иванцов А.И. Основы теории точности измерительных устройств: Учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во стандартов, 1972. – 212 с.
6. Подмастерьев К.В. Универсальный прибор функциональной диагностики подшипниковых узлов технологического оборудования / К.В. Подмастерьев, В.Я. Варгашкин, Е.Л. Шестопалова // Сборник трудов. Разработка и внедрение новых ресурсосберегающих технологий в области машиностроения. – Орел: НТО Машпром, 1991. – С. 85-91.
7. Расчет точности машин и приборов / В.А. Булатов, И.Г. Фридлиндер, А.П. Баталов и др. // Под общ. ред. В.А. Булатова и И.Г. Фридлиндера. – СПб.: Политехника, 1993. – 495 с.
8. Рудзит Я.А. Основы метрологии, точность и надежность в приборостроении: Учебное пособие для студентов приборостроительных специальностей вузов / Я.А. Рудзит, В.Н. Плуталов. – М.: Машиностроение, 1991. – 304 с.
9. Средства для линейных измерений. – Л.: Машиностроение, 1978. – 264 с.

Учебное издание

Подмастерьев Константин Валентинович

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Учебное пособие

Редактор В.Л. Моисеева
Технический редактор Т.П. Прокудина

Орловский государственный технический университет
Лицензия ИД № 00670 от 05.01.2000.

Подписано к печати 09.07.2004 г. Формат 60х84 1/16.
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 8,0. Усл. печ. л. 8,7. Тираж 500 экз.
Заказ № 72/04М

Отпечатано с готового оригинал-макета
на полиграфической базе ОрелГТУ,
302030, г. Орел, ул. Московская, 65.