Д.Н. Ешуткин
Е.Н. Грядунова
А.В. Журавлева
Н.Г. Калашникова
А.В. Коробко

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ 2.
КИНЕМАТИКА

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНПК
УНИВЕРСИТЕТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ - УЧЕБНО-НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС»

Д.Н. Ешуткин, Е.Н. Грядунова,
А.В. Журавлева, Н.Г. Калашникова, А.В. Коробко

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ 2.
КИНЕМАТИКА

Рекомендовано ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК»
для использования в учебном процессе в качестве учебного пособия
для высшего профессионального образования

Орел 2012

УДК 531.1 (075)
ББК 22.21я7
Т33

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент
кафедры «Теоретическая и прикладная механика»
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Государственный университет - учебно-научно-
производственный комплекс»
Б.Г. Кобцев,

кандидат технических наук, профессор, заведующий
кафедрой «Технология и предпринимательство»
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Орловский государственный университет»
А.А. Калекин

Т33 **Теоретическая механика. В 2 ч. Ч. 2. Кинематика:** учебное пособие для высшего профессионального образования/ Д.Н. Ешуткин, Е.Н. Грядунова, А.В. Журавлева, Н.Г. Калашникова, А.В. Коробко. – Орел: ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК», 2012. – 94 с.

ISBN 978-5-93932-440-3

Учебное пособие содержит выводы законов теоретической механики по разделу «Кинематика», а также основные понятия и определения используемые в этом разделе. Включает подробное решение типовых задач, задачи для самоконтроля, решение которых выполнено в единицах системы СИ.

Предназначено для студентов всех направлений подготовки бакалавров факультета «Новых технологий и автоматизации производства», Института транспорта, Архитектурно-строительного института и факультета «Технологии и конструкторско-технологической информатики», а также других направлений, изучающих дисциплину «Теоретическая механика» и обучающихся по машиностроительным и строительным специальностям.

УДК 531.1(075)
ББК 22.21я7

ISBN 978-5-93932-440-3

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика есть наука об общих законах механического движения и равновесия материальных тел.

Под механическим движением понимается изменение относительного положения материальных тел в пространстве с течением времени. Теоретическая механика изучает наиболее общие законы механического движения. Она не учитывает индивидуальные свойства материальных тел, за исключением двух: свойства протяженности и свойства гравитации (свойства частиц материи тяготеть друг к другу). Наблюдать и изучать механическое движение материальных тел можно по отношению к другим материальным телам, принятым за тела отсчета. С этими телами обычно связывают систему координатных осей, которую называют системой отсчета. Частным случаем механического движения является равновесие материальных тел.

В окружающей нас природе все материальные тела взаимодействуют друг с другом. Характер этого взаимодействия может проявляться по-разному. Например, в передаче какого-то количества теплоты, количества электричества и др. В механике изучаются только механические взаимодействия, т.е. такие взаимодействия, в результате которых происходит изменение движения тел или изменение их формы (деформация).

Поскольку механическое движение мы постоянно наблюдаем в природе и технике, понятно какую важную роль для современного естествознания играет теоретическая механика. Вся история развития этой науки отражает её взаимную связь с проблемами техники.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Основные положения

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение точки, системы материальных точек и абсолютно твердого тела независимо от причин, вызывающих это движение, т.е. независимо от действующих на них сил.

В кинематике изучают зависимости между пространственно-временными характеристиками механического движения. Поэтому кинематику называют геометрией движения. Всякое движение происходит в пространстве и во времени. Пространство и время неразрывно связаны между собой. В теоретической механике пространство считается трехмерным евклидовым. Его свойства во всех точках и направлениях одинаковы и не зависят от находящихся в нем тел. Чтобы характеризовать движение какой-либо точки или тела, нужно сравнить их положение с положением какого-либо другого тела, называемого *телом отсчета*. Систему координат, связанную с этим телом и принятым в ней отсчетом времени, называют *системой отсчета*. Так как система отсчета всегда связана с каким-то телом, а в мире абсолютно неподвижных тел не существует, то движение точек и тел всегда является относительным.

Время в классической механике является универсальным, т.е. оно предполагается одинаковым во всех системах отсчета и независимым от относительного движения этих систем. При измерении времени в кинематике различают такие понятия, как промежуток времени, момент времени, начальный момент времени. *Промежутком времени* называется время, протекающее между физическими явлениями. *Моментом времени* называют границу между смежными промежутками времени. *Начальным моментом* называется время, с которого начинают отсчет времени.

Движение в кинематике принимают заданным относительно какой-нибудь системы отсчета. Задать уравнение (закон) движения точки или тела – значит, указать способ определения положения точки или тела относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Наблюдая движение какого-либо твердого тела, мы видим, что движения различных точек тела неодинаковы. Поэтому изучению движения твердого тела предшествует изучение движения точки. В связи с этим кинематику делят на кинематику точки и кинематику твердого тела.

Основной задачей кинематики точки является изучение законов ее движения, а также определение всех кинематических величин, характеризующих это движение. К ним относятся: траектория, скорость и ускорение точки. Линия, описываемая движущейся точкой в пространстве, называется *траекторией* этой точки. Если траектория точки – прямая линия, то движение точки прямолинейное, в противном случае – криволинейное. *Скорость* – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета. *Ускорение точки* – векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля и направление скорости. Наиболее распространены три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

1.2. Векторный способ задания движения точки

Уравнение движения. Траектория. При векторном способе задания движения точки положение движущейся точки определяется радиусом-вектором $\bar{r}$, проведенным из выбранной неподвижной точки (на рис. 1 точка O – начало координат). Если точка M неподвижна, то $\bar{r}$ = const. При движении точки M радиус-вектор $\bar{r}$ изменяется с течением времени по определенному закону и, следовательно, является векторной функцией скалярного аргумента t, т.е.

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1}$$

Функцию $\bar{r}(t)$ полагают однозначной, непрерывной и в большинстве случаев дважды дифференцируемой. Уравнение (1) называется уравнением или законом движения точки в векторной форме.

При движении точки конец радиуса-вектора $\bar{r}$ движется по траектории. Из математики известно, что множество точек концов переменного вектора при фиксированной точке его приложения называется *годографом* этого вектора. Следовательно, траектория точки является годографом радиуса-вектора $\bar{r}$. Уравнение (1) будет уравнением траектории точки в векторной форме.

Скорость точки. Предположим, что в некоторый момент времени t движущаяся точка занимает положение M, определяемое радиусом-вектором $\bar{r}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ (Δt – малый промежуток времени) – положение M_1, определяемое радиусом-вектором $\bar{r}_1$ (рис. 1). Вектор $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$, начало которого совпадает с начальным положением движущейся точки, а конец – с ее конечным положением, называется перемещением точки за время Δt. Отношение перемещения точки $\Delta\bar{r}$ к промежутку времени Δt называется вектором средней скорости точки за промежуток Δt:

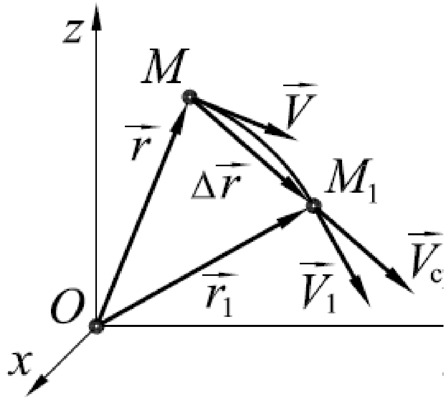


Рис. 1

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}. \qquad (2)$$

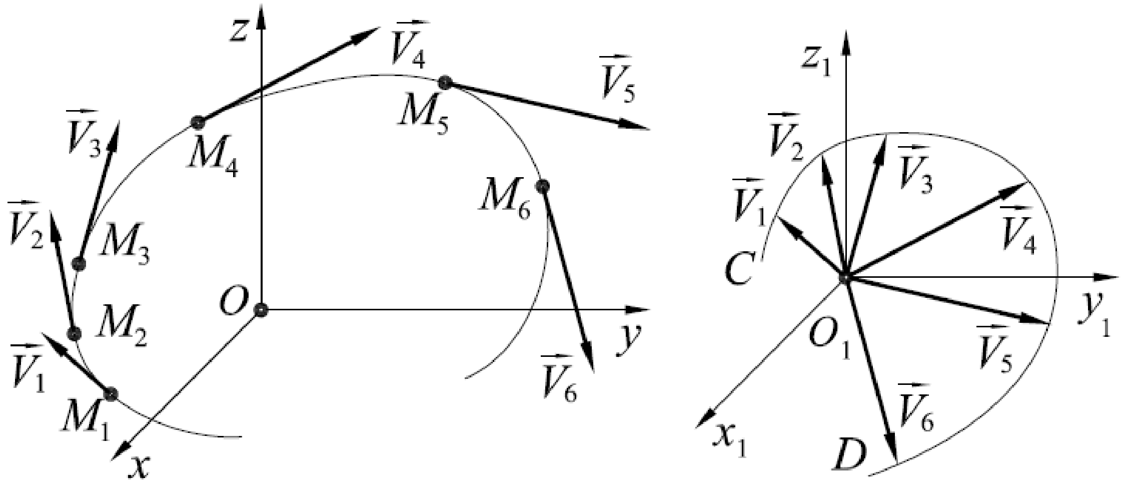
Вектор $\bar{V}_{cp}$ совпадает с направлением вектора $\Delta\bar{r}$.

Пусть $\Delta t \to 0$ ($M_1 \to M$), тогда отношение $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ стремится к некоторому пределу. Предел этого отношения называют вектором скорости точки в момент времени t или в точке M:

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \qquad (3)$$

Скорость в данной точке равна первой производной по времени от радиуса-вектора $\bar{r}$. Так как секущая в пределе переходит в касательную, то скорость в данной точке направлена по касательной траектории. Следовательно, скорость материальной точки является величиной векторной, направленной по касательной к траектории в направлении движения и равной первой производной радиуса-вектора по времени.

Годограф вектора скорости. Отметим несколько положений точки на траектории: M_1, M_2, M_3, ... и векторы скорости точки в этих положениях: $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ (рис. 2, *а*). Выберем в пространстве произвольную точку O_1 и примем ее за начало новой системы отсчета координат $O_1x_1y_1z_1$, причем ось O_1x_1 параллельна оси Ox; O_1y_1 параллельна Oy и O_1z_1 параллельна Oz (рис. 2, *б*). Если от точки O_1 отложить скорости, соответствующие всем положениям движущейся точки, и соединить концы этих векторов, то получится линия CD, которая называется годографом скорости, т.е. линия, образованная множеством концов векторов скорости, проведенных из одной и той же точки пространства.



а *б*

Рис. 2

Ускорение точки. Пусть в момент времени t точка находилась в положении M и имела скорость $\overline{V}$, а через малый промежуток времени Δt в положении M_1 и имела скорость $\overline{V_1}$ (рис. 3). Тогда за промежуток Δt скорость точки получает приращение $\Delta\overline{V} = \overline{V_1} - \overline{V}$.

Отношение приращения $\Delta\overline{V}$ вектора скорости к промежутку времени Δt называют вектором среднего ускорения точки за этот промежуток времени, т.е.

$$\overline{a}_{cp} = \frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t}. \qquad (4)$$

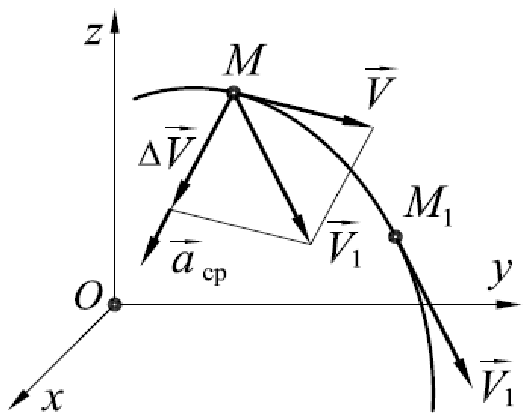


Рис. 3

Вектор $\overline{a}_{cp}$ имеет направление $\Delta\overline{V}$, так как Δt – скалярная положительная величина. Предел, к которому стремится среднее ускорение при $\Delta t \to 0$, называют ускорением точки в данный момент t:

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \dot{\overline{V}} = \ddot{\overline{r}}, \qquad (5)$$

т.е. ускорение движущейся точки равно производной от вектора скорости по времени. Направлен вектор ускорения по касательной к годографу скорости.

1.3. Координатный способ задания движения точки

Уравнения движения. Траектория. Пусть материальная точка движется в пространстве относительно координатной системы *Oxyz* (рис. 4). Положение точки в пространстве определяется ее координатами x, y, z. При движении точки в пространстве ее координаты будут изменяться с течением времени. Следовательно, для задания движения точки необходимо знать значения координат для каждого момента времени, т.е.

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{6}$$

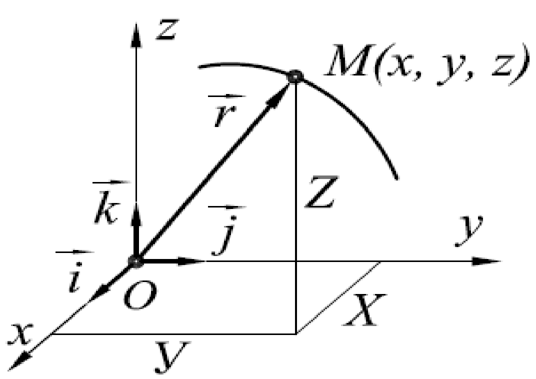


Рис. 4

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ должны быть однозначны, непрерывны и, по меньшей мере, дважды дифференцируемы. Зная эти функции можно для любого момента времени t найти координаты x, y, z, и тем самым определить положение движущейся точки в этот момент. Поэтому уравнения (6) называют уравнениями движения точки в пространстве.

Если точка описывает плоскую траекторию, то, принимая плоскость этой траектории за координатную плоскость *Oxy*, будем иметь два уравнения движения точки:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \tag{7}$$

В случае прямолинейного движения точки, принимая ее траекторию за ось x, будем иметь одно уравнение прямолинейного движения точки:

$$x = f_1(t). \tag{8}$$

Уравнения (6) – (8), определяющие положение точки в любой момент времени, могут рассматриваться как параметрические уравнения траектории. Для определения уравнения траекторий в координатной форме необходимо из уравнений движения исключить время.

Пример 1. Движение точки в системе Oxy задано уравнениями $x = at$, $y = -bt^2$, где a и b – постоянные величины. Определить траекторию движения точки.

Решение

Из первого уравнения находим $t = \dfrac{x}{a}$ и, подставляя это значение t во второе уравнение, получаем $y = -\dfrac{b}{a^2}x^2$. Следовательно, траекторией точки является часть параболы, находящейся в четвертой четверти, с вершиной в начале координат и осью, параллельной оси Oy.

Пример 2. Движение точки задано уравнениями $x = 3a{\cdot}\cos\omega t$, $y = 2a{\cdot}\sin\omega t$, где a и ω – постоянные величины. Определить траекторию движения точки.

Решение

Представим уравнения движения в виде: $\dfrac{x}{3a} = \cos\omega t$, $\dfrac{y}{2a} = \sin\omega t$.

Возведем эти равенства почленно в квадрат и сложим, получим $\dfrac{x^2}{9a^2} + \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$, т.е. траекторией точки будет эллипс с полуосями $3a$ и $2a$.

Скорость точки. Если движение точки задано координатным способом: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то скорость точки определяется по ее проекциям на оси координат. Действительно, обозначим орты осей координат $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Из начала координат в точку M проведем радиус-вектор $\bar{r}$ (рис. 4). Разложив вектор по ортам осей координат, имеем: $\bar{r} = \bar{i} \cdot r_x + \bar{j} \cdot r_y + \bar{k} \cdot r_z$. Но $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, поэтому

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z, \tag{9}$$

где x, y, z – координаты движущейся точки.

Разложив вектор скорости $\bar{V}$ по ортам координатных осей, получим:

$$\bar{V} = \bar{i} \cdot V_x + \bar{j} \cdot V_y + \bar{k} \cdot V_z, \tag{10}$$

где V_x, V_y, V_z – проекции скорости на оси координат.

Из векторного способа задания движения точки известно, что $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Дифференцируя обе части формулы (9) по времени и учитывая, что векторы постоянны по величине и направлению, будем иметь:

$$\bar{V} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}. \tag{11}$$

Сравнивая формулы (11) и (10) и зная, что, если два вектора равны, то равны и их коэффициенты при $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, имеем:

$$V_x = \dot{x}, \qquad V_y = \dot{y}, \qquad V_z = \dot{z}. \tag{12}$$

Следовательно, проекции скорости на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки. Зная проекции скорости на оси координат, можно определить модуль и направление скорости. Величина вектора скорости равна:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \tag{13}$$

направление вектора скорости может быть определено по направляющим косинусам углов, составляемых им с осями координат:

$$\cos(\bar{V}, \hat{\ } \bar{i}) = \frac{V_x}{V}; \qquad \cos(\bar{V}, \hat{\ } \bar{j}) = \frac{V_y}{V}; \qquad \cos(\bar{V}, \hat{\ } \bar{k}) = \frac{V_z}{V}. \tag{14}$$

Уравнение годографа скорости. Пусть кривая *CD* является годографом скорости точки (рис. 5, рис. 2). Тогда радиусом-вектором любой точки *N* годографа скорости *CD* будет вектор скорости *V*, а координаты x_1, y_1, z_1 точки *N* будут равны проекциям скорости на оси координат, т.е.

$$x_1 = V_x = \dot{x}, \qquad y_1 = V_x = \dot{y}, \qquad z_1 = V_x = \dot{z}. \tag{15}$$

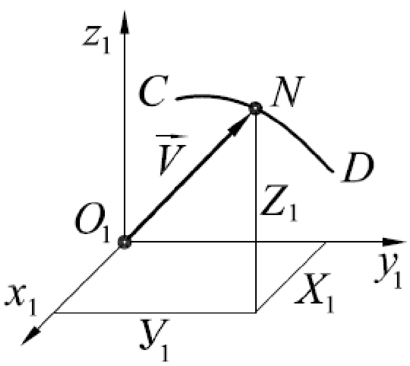


Рис. 5

Уравнения (15) являются параметрическими уравнениями годографа скорости. Для получения уравнения годографа в координатной форме необходимо из уравнений (15) исключить параметр *t*.

Ускорение точки. Так как вектор ускорения точки равен второй производной от радиуса-вектора точки $\bar{r}$ по времени или первой производной по времени от вектора скорости $\overline{V}$, то, учитывая формулы (9), а также то, что орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ постоянны, получим:

$$\overline{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z, \text{ или } \overline{a} = \bar{i}\dot{V}_x + \bar{j}\dot{V}_y + \bar{k}\dot{V}_z. \tag{16}$$

Используя формулу разложения вектора $\overline{a}$ на оси, можно написать:

$$\overline{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z. \tag{17}$$

Сравнивая выражения (16) и (17) и приравнивая коэффициенты при ортах $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, имеем:

$$a_x = \ddot{x} = \dot{V}_x, \quad a_y = \ddot{y} = \dot{V}_y, \quad a_z = \ddot{z} = \dot{V}_z, \tag{18}$$

где a_x, a_y, a_z – проекции ускорения точки на соответствующие оси.

Таким образом, проекции ускорения точки на оси декартовых координат равны вторым производным по времени от соответствующих координат или первым производным по времени от соответствующих проекций скоростей. Вектор $\overline{a}$ вполне определяется заданием его проекций, величина вектора ускорения равна:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \tag{19}$$

Направление вектора $\overline{a}$ задается косинусами углов, составляемых им с осями координат:

$$\cos(\overline{a}\,^\wedge \bar{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\overline{a}\,^\wedge \bar{j}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\overline{a}\,^\wedge \bar{k}) = \frac{a_z}{a}. \tag{20}$$

Пример. Определить уравнение траектории, скорость и ускорение середины M шатуна кривошипно-ползунного механизма, если $OA = AB = 2a$, $\varphi = 3\omega t$ (рис. 6), ω – постоянная величина.

Решение

Сначала определяем уравнения движения точки M.

Проводим оси координат и, обозначая координаты точки M в произвольном положении через x и y, находим:

$$x = 2a\cos\varphi + a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi$$

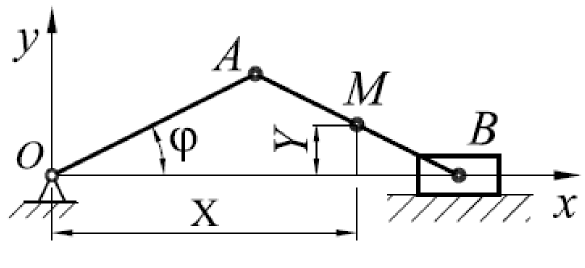


Рис. 6

Заменяя φ его значением, получаем уравнения движения точки M:

$$x = 3a\cos 3\omega t, \quad y = a\sin 3\omega t .$$

Для определения уравнения траектории точки M уравнения движения представим в виде $\dfrac{x}{3a} = \cos 3\omega t, \quad \dfrac{y}{a} = \sin 3\omega t$. Возведя эти равенства почленно в квадрат и складывая, получим $\dfrac{x^2}{9a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, т.е. траекторией точки M является эллипс с полуосями $3a$ и a. По формулам (12) и (13) находим скорость точки M:

$$V_x = -9a\omega \cdot \sin 3\omega t, \quad V_y = 3a\omega \cdot \cos 3\omega t ;$$

$$V = 3a\omega\sqrt{9\sin^2 3\omega t + \cos^2 3\omega t} = 3a\omega\sqrt{1 + 8\sin^2 3\omega t}.$$

Используя формулы (18) и (19), определим ускорение точки M:

$$a_x = -27a\omega^2 \cos 3\omega t, \quad a_y = -9a\omega^2 \sin 3\omega t,$$

$$a = 9a\omega^2\sqrt{9\cos^2 3\omega t + \sin^2 3\omega t} = 9a\omega^2\sqrt{1 + 8\cos^2 3\omega t}.$$

Для определения направления $\overline{V}$ и $\overline{a}$ необходимо воспользоваться формулами (14) и (20).

1.4. Естественный способ задания движения точки

Задание движения точки. Естественный способ задания, движения точки применяется в тех случаях, когда траектория ее движения известна заранее.

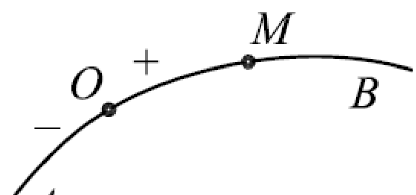


Рис. 7

Пусть материальная точка движется по траектории AB (рис. 7). Для определения закона движения точки в пространстве достаточно задать положение ее на траектории. С этой целью одну из точек на траектории принимают за начало отсчета. Будем определять положение движущейся точки M на траектории ее расстоянием от точки O, отсчитываемым по траектории, т.е. криволинейной (дуговой) координатой S. Для однозначного определения положения точки на траектории дуговую координату S считают величиной алгебраической, т.е. положительной или отрицательной, для чего задают положительное и отрицательное направление отсчета дуговой координаты.

При движении точки M по траектории ее дуговая координата S будет изменяться с течением времени. Следовательно, чтобы знать положение точки на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость:

$$S = S(t). \tag{21}$$

Уравнение (21) определяет закон движения точки по траектории. Функция $S(t)$ должна быть однозначной, непрерывной и дифференцируемой.

Таким образом, для задания движения точки естественным способом надо задать:

1) траекторию;

2) начало отсчета дуговой координаты с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета;

3) закон движения точки по траектории $S = S(t)$.

Замечание. Дуговая координата S определяет положение движущейся точки на траектории, и ее не следует смешивать с пройденным путем σ. Дуговая координата может равняться пути только в том случае, если движение точки начинается из точки O и совершается в положительном направлении. При движении точки в одном направлении

$$\sigma = |S - S_0|. \tag{22}$$

Если же точка в течение промежутка $t_2 - t_1$ движется произвольно, то этот промежуток разбивают на малые промежутки Δt, (i = 1, 2, ..., n) так, чтобы в каждом из них точка совершала движение в одном направлении. Обозначив приращения дуговой координаты ΔS, найдем путь:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} |S_1|. \tag{23}$$

Скорость точки. Пусть точка движется по заданной траектории по закону $S = S(t)$ и в момент времени t занимает положение M, а через малый промежуток Δt – положение M_1 (рис. 8). Из произвольной неподвижной точки O_1, проведем в точку M радиус-вектор $\bar{r}$. Применяя формулу (3), получим $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$. Введя в качестве промежуточной переменной дуговую координату S, от которой зависит $\bar{r}$, будем иметь:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dS} \cdot \dot{S}. \tag{24}$$

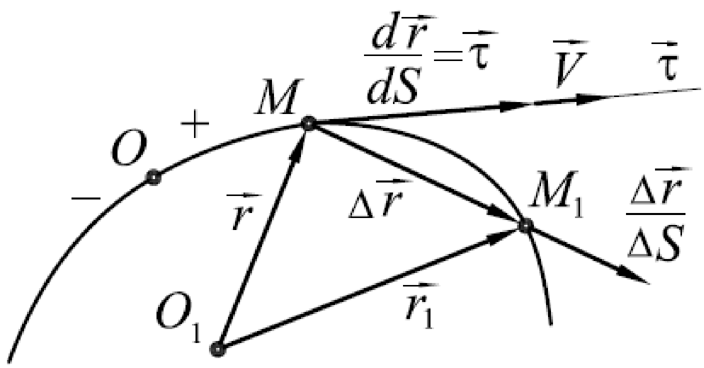


Рис. 8

Вектор $\frac{d\bar{r}}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta S}$ направлен по касательной, проведенной в точке M в сторону возрастания дуговой координаты S. Так как $\left|\frac{d\bar{r}}{dS}\right| = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta S}\right| = 1$, то $\frac{d\bar{r}}{dS}$ является единичным вектором (ортом) $\bar{\tau}$ касательной к траектории точки, проведенной в сторону возрастания дуговой координаты S, т.е.

$$\frac{d\bar{r}}{dS} = \bar{\tau}. \tag{25}$$

Для вектора скорости $\bar{V}$ с учетом формул (24) и (25) получим:

$$\bar{V} = \bar{\tau} \cdot \dot{S}. \tag{26}$$

Производная $\dot{S}$ в выражении (26) есть проекция вектора скорости точки $\bar{V}$ на касательную, т.е. определяет алгебраическую величину скорости $\tilde{V} = V_r = \dot{S}$, а модуль скорости: $V = |\tilde{V}| = |\dot{S}|$.

Орт $\bar{\tau}$ всегда направлен в сторону возрастания дуговой координаты S. Если в некоторый момент времени $\dot{S} > 0$, то в этот момент функция S возрастает, т.е. точка движется в сторону увеличения S, и направление вектора скорости $\bar{V}$ совпадает с направлением орта $\bar{\tau}$. Если же $\dot{S} < 0$, то направление вектора скорости $\bar{V}$ противоположно направлению орта $\bar{\tau}$. Таким образом, знак $\tilde{V} = \dot{S}$ указывает направление движения точки по траектории, а значит, и вектора $\bar{V}$. При движении точки только в сторону возрастания дуговой координаты S во все моменты $\dot{S} > 0$. В этом случае $V = \dot{S}$.

Кривизна и радиус кривизны кривой линии. Естественные оси. Прежде чем переходить к определению ускорения точки при естественном способе задания, рассмотрим важные для кинематики геометрические понятия – кривизны и радиуса кривизны кривой. Пусть дана некоторая кривая (траектория точки).

Возьмем на ней две близкие точки A и B, длину дуги AB обозначим ΔS; проведем в точках A и B касательные к кривой и обозначим орты этих касательных $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}_1$ (рис. 9).

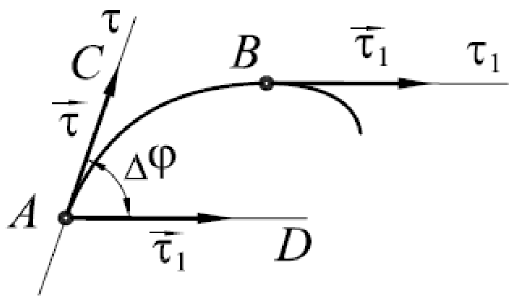


Рис. 9

Угол между касательными, называемый углом смежности и измеряемый в радианах, обозначим $\Delta\varphi$. Средней кривизной дуги AB называют отношение $\Delta\varphi / \Delta S$, т.е $k_{ср} = \Delta\varphi / \Delta S$. Будем теперь приближать точку B к точке A, т.е. $\Delta S \to 0$. Предел этого отношения при $\Delta S \to 0$ называют *кривизной* данной линии в точке A:

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}. \tag{27}$$

Величина, обратная кривизне кривой в данной точке A, называется *радиусом кривизны* кривой в этой точке:

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{dS}{d\varphi}, \tag{28}$$

$$k = \frac{1}{\rho}. \tag{29}$$

Для примера найдем кривизну и радиус кривизны прямой линии и окружности. В случае прямой линии $d\varphi = 0$ независимо от dS, поэтому $k = 0$, $\rho = \infty$, т.е. можно сказать, что прямая линия есть кривая с бесконечным радиусом кривизны. Для окружности радиусом R угол смежности $d\varphi$ равен центральному углу, соединяющему центр O с точками A и B (рис. 10).

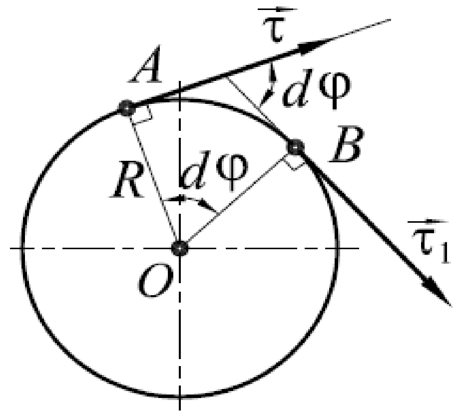


Рис. 10

Длина дуги $dS = R{\cdot}d\varphi$, а поэтому $k = \dfrac{d\varphi}{Rd\varphi} = \dfrac{1}{R}$, $\rho = \dfrac{1}{k} = R$, т.е. радиус кривизны окружности равен радиусу самой окружности. Отсюда заключаем, что радиус кривизны кривой линии есть радиус такой окружности, которая имеет с кривой в данной ее точке одинаковую кривизну. Через точки A, C и D концов векторов $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}_1$ (рис. 9) проведем плоскость. Положение этой плоскости будет зависеть от точки B. Если $B \to A$, то, очевидно, и положение этой плоскости будет изменяться. Эта плоскость, поворачиваясь вокруг $\bar{\tau}$, будет неограниченно приближаться к некоторому предельному положению. Плоскость, представляющая собой предельное положение плоскости ACD при $B \to A$, называется *соприкасающейся плоскостью* траектории в точке A (рис. 11).

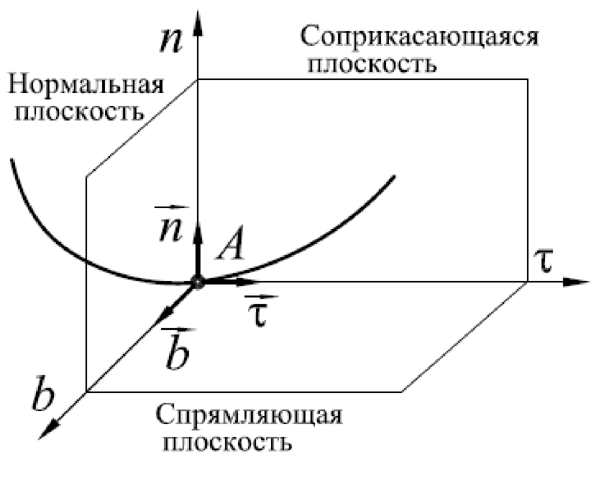


Рис. 11

Если траектория является плоской кривой, то соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой. Плоскость, перпендикулярная к $\bar{\tau}$ и проходящая через точку A, называется *нормальной плоскостью,* а линия пересечения нормальной и соприкасающихся плоскостей называется *главной нормалью* в точке A. Главную нормаль проводят в сторону вогнутости, единичный орт ее обозначается $\bar{n}$. Нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости, называют *бинормалью.* Направление ее задают единичным ортом $\bar{b}$. Орт $\bar{b}$ направляют так, чтобы векторы $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ и $\bar{b}$ образовали правую систему координат, т.е. $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$. Оси τ, n, b называются *естественными осями координат.* Плоскость, проведенная через оси τ и b, называется *спрямляющей.*

При движении точки направления естественных осей непрерывно меняются, так как они перемещаются вместе с движущейся точкой, т.е. это подвижные оси.

Ускорение точки при задании движения естественным способом. Проекции ускорения на естественные оси. Пусть движение точки задано естественным способом, т.е. известна траектория точки и уравнение движения по траектории $S = S(t)$.

Рассмотрим два бесконечно близких положения точки M и M_1; скорости точки обозначим $\overline{V}$ и $\overline{V}_1$ (рис. 12). Из векторного способа задания движения точки известно, что $\overline{a} = \dot{\overline{V}}$. Подставляя для скорости $\overline{V}$ ее выражение (26) и учитывая при этом, что орт $\overline{\tau}$ переменный вектор, так как изменяется его направление, получим $\overline{a} = \ddot{S} \cdot \overline{\tau} + \dot{S} \cdot \dot{\overline{\tau}}$, или

$$\overline{a} = \dot{V}_\tau \cdot \overline{\tau} + V_\tau \cdot \dot{\overline{\tau}} \ . \qquad (30)$$

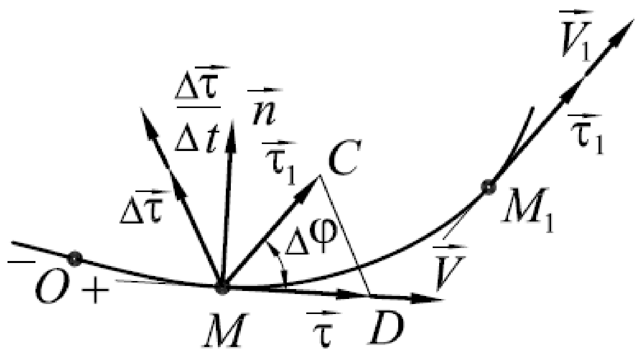


Рис. 12

Найдем величину и направление вектора $\dot{\overline{\tau}}$. Так как $\dot{\overline{\tau}} = \frac{d\overline{\tau}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{\tau}}{\Delta t}$, а при $\Delta t \to 0$ точка $M_1 \to M$, то векторы $\overline{\tau}$ и $\overline{\tau}_1$ будут лежать в соприкасающейся плоскости, значит, и $\Delta\overline{\tau}$, и $\frac{\Delta\overline{\tau}}{\Delta t}$ лежат в соприкасающейся плоскости.

В связи с тем, что $\frac{d}{dt}\left(\overline{\tau}^2\right) = 2\overline{\tau} \cdot \frac{d\overline{\tau}}{dt}$, так как $\left|\overline{\tau} \cdot \overline{\tau}\right| = \left|\overline{\tau}^2\right| = 1$, получаем, что $\dot{\overline{\tau}}$ перпендикулярен $\overline{\tau}$. Следовательно, $\dot{\overline{\tau}}$ совпадает с направлением главной нормали, а поэтому

$$\dot{\overline{\tau}} = \left|\frac{d\overline{\tau}}{dt}\right| \cdot \overline{n}. \qquad (31)$$

Найдем $\left|\frac{d\bar{\tau}}{dt}\right| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\bar{\tau}|}{\Delta t}$. Из равнобедренного треугольника *MCD*, учитывая, что *MC* = *MD* = 1, находим $|\Delta\bar{\tau}| = CD = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$. Отсюда

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\bar{\tau}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t},$$

или

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}\right). \qquad 32)$$

Если $\Delta t \to 0$, то $\Delta S \to 0$ и $\Delta\varphi \to 0$, следовательно, равенство (32) можно переписать так:

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\dot{S}}{\rho}. \qquad (33)$$

Учитывая (31) и (33), будем иметь $\dot{\bar{\tau}} = \frac{\dot{S}}{\rho} \cdot \bar{n}$. Подставив это значение в (30) и учитывая, что $\dot{S}^2 = V^2$, получаем $\bar{a} = \ddot{S} \cdot \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \bar{n}$, или

$$\bar{a} = \dot{V}_\tau \cdot \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \bar{n}. \qquad (34)$$

Равенство (34) представляет собой формулу разложения ускорения $\bar{a}$ по естественным осям. Первый член правой части этого равенства называется касательным или тангенциальным ускорением точки

M и обозначается $\bar{a}_\tau$, а второй член называется нормальным или центростремительным ускорением и обозначается $\bar{a}_n$, следовательно,

$$\bar{a}_\tau = \dot{V}_\tau \cdot \bar{\tau} = \ddot{S} \cdot \bar{\tau}, \qquad \bar{a}_n = \frac{V^2}{\rho} \cdot \bar{n}, \tag{35}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \tag{36}$$

Скалярные множители $\frac{V^2}{\rho}$ и $\dot{V}_\tau = \ddot{S}$ в выражениях (35) представляют собой проекции ускорения точки на касательную и главную нормаль. Так как вектор ускорения расположен в соприкасающейся плоскости, то проекция ускорения на бинормаль равна нулю, т.е.

$$a_\tau = \dot{V}_\tau = \ddot{S}, \qquad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \qquad a_b = 0. \tag{37}$$

Проекция ускорения точки на главную нормаль всегда положительна. Поэтому нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны.

Условимся алгебраическую величину касательного ускорения точки обозначать $\tilde{a}_\tau$, а его модуль a_τ. Исходя из этого $\tilde{a}_\tau = \dot{\tilde{V}} = \ddot{S}$. Если алгебраическая величина $\tilde{a}_\tau$ имеет знак плюс, то направление касательного ускорения точки $\bar{a}_\tau$ совпадает с направлением орта $\bar{\tau}$, а если минус – то противоположно $\bar{\tau}$. Модуль касательного ускорения $a_\tau = |\tilde{a}_\tau| = |\dot{\tilde{V}}| = |\ddot{S}|$. Если проекции скорости $\bar{V}$ и касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ на касательную имеют одинаковые знаки, то и направления этих векторов совпадают, т.е. точка движется ускоренно (рис. 13, *а*). Если же $V_r = \tilde{V} = \dot{S}$ и $\tilde{a}_\tau = \dot{\tilde{V}} = \ddot{S}$ имеют различные знаки, то и

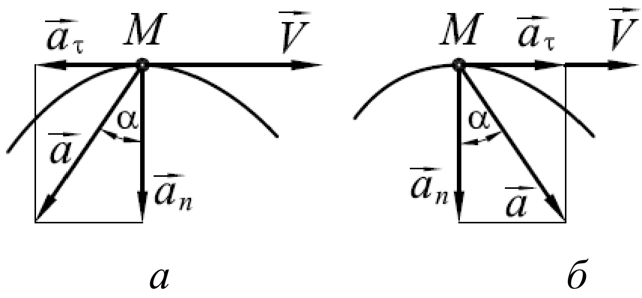


Рис. 13

направления $\overline{V}$ и $\overline{a}_\tau$ противоположны, точка движется замедленно (рис. 13, *б*). При движении точки только в одну сторону возрастания дуговой координаты имеем: $V = \dot{S}$, $a_\tau = |\dot{V}|$. При этом если $\dot{V} > 0$, то точка движется ускоренно, в противном случае – замедленно.

По проекциям ускорения на естественные оси легко найти модуль и направление ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{V}_\tau^2 + \frac{V^4}{\rho^2}}, \tag{38}$$

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{|\ddot{S}|}{V^2/\rho}. \tag{39}$$

Частные случаи движения точки. *Прямолинейное движение.* При прямолинейном движении $\rho = \infty$, поэтому $a_n = 0$. Следовательно, полное ускорение точки равно ее касательному ускорению, т.е. $\overline{a} = \overline{a}_\tau$. Так как при таком движении скорость изменяется только по величине, то видно, что касательное ускорение характеризует изменение скорости по численной величине.

Замечание. Если при криволинейном движении точки в какой-либо момент $a_n = 0$, то это означает, что она находится в точке перегиба.

Равномерное криволинейное движение – это движение с постоянной по величине скоростью, т.е. V – const, поэтому $a_\tau = 0$, следовательно, $\overline{a} = \overline{a}_n$. Вектор ускорения $\overline{a}$ направлен все время по нормали к траектории точки. Так как скорость изменяется по направлению, то, следовательно, нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Найдем закон или уравнение этого движения. Выбрав положительное направление отсчета дуговой координаты, которое совпадает с направлением движения, будем иметь $V = \dfrac{dS}{dt}$, и так как V – const, то $dS = V \cdot dt$ и $S - S_0 = V \cdot t$, где S_0 – начальное значение дуговой координаты. Отсюда $S = S_0 + Vt$. Это и есть уравнение равномерного движения. Согласно формуле (22) пройденный путь $\sigma = V \cdot t$, т.е. линейно зависит от времени.

Равнопеременное движение – это такое движение, при котором алгебраическая величина касательного ускорения $\tilde{a}_\tau$, остается постоянной. Составим уравнение равнопеременного движения, полагая, что в начальный момент $t_0 = 0$ начальная скорость $\tilde{V}_0$, а начальное значение дуговой координаты S_0. Так как $\tilde{a} = \frac{d\tilde{V}}{dt} - \text{const}$, то разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$d\tilde{V} = \tilde{a}_\tau \cdot dt, \qquad \int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}} d\tilde{V} = \int_0^t \tilde{a}_\tau dt, \qquad \tilde{V} - \tilde{V}_0 = \tilde{a}_\tau t,$$

или

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0 + \tilde{a}_\tau t. \tag{40}$$

По формуле (40) находим скорость равнопеременного движения. Далее имеем:

$$\frac{dS}{dt} = \tilde{V}_0 + \tilde{a}_\tau t, \qquad \int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t (\tilde{V}_0 + \tilde{a}_\tau t)dt, \qquad S = S_0 + \tilde{V}_0 t + \frac{\tilde{a}_\tau t^2}{2}. \tag{41}$$

Уравнение (41) является уравнением равнопеременного движения. Если выбрать направление движения, которое совпадает с положительным направлением отсчета дуговой координаты, то $\tilde{V} = V, \tilde{V}_0 = V_0, \ \tilde{a}_\tau = a_\tau$ при равноускоренном движении и $\tilde{a}_\tau = -a_\tau$ при равнозамедленном движении. Поэтому формулы (40) и (41) примут вид:

$$V = V_0 \pm a_\tau t, \qquad S = S_0 + V_0 t \pm \frac{a_\tau t^2}{2}. \tag{42}$$

При прямолинейном равнопеременном движении $a_\tau = a$ и

$$V = V_0 \pm at, \qquad S = S_0 + V_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \tag{43}$$

Знак плюс соответствует равноускоренному движению, а знак минус – равнозамедленному. По уравнениям равнопеременного движения можно находить путь, пройденный движущейся точкой, если посчитать $S_0 = 0$.

Пример

Уравнения движения точки заданы: $x = 4 - 2t,\quad y = 8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$, где x и y выражены в см, t – в с. Найти уравнение траектории точки и для момента времени $t_1 = 1$ с, определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке.

Решение

Для получения уравнения траектории необходимо из уравнений движения исключить время t. Из первого уравнения $t = \frac{4-x}{2} = 2 - \frac{x}{2}$.

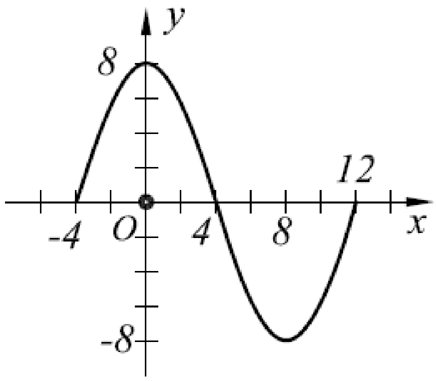


Рис. 14

Подставляя это значение t во второе уравнение, получаем

$$y = 8\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(4-x)}{2}\right) = 8\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{8}\right),$$

$$y = 8\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right),$$

т.е. уравнением траектории является косинусойда (рис. 14).

Скорость точки находим по ее проекции на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = -2 \text{ см/с}, \quad V_y = \dot{y} = 2\pi\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4 + 4\pi^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)}, \quad \text{при } t_1 = 1 \text{ с}, \ V_1 = 4{,}87 \text{ см/с}.$$

Ускорение точки также находим по проекциям:

$$a_x = \dot{V}_x = 0, \quad a_y = \dot{V}_y = -\frac{\pi^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{\pi^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

при $t_1 = 1$ с, $a_1 = 3{,}49$ см/с^2 находим касательное ускорение:

$$a_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|\frac{-4\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cdot\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)}{\sqrt{4+4\pi^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)}}\right|.$$

Зная полное и касательное ускорения точки, находим нормальное ускорение при t_1 = 1 с $a_{n_1} = \sqrt{a_1^2 - a_\tau^2} = 1{,}6$ см/с^2.

Так как $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, то отсюда определим радиус кривизны траектории при t_1 = 1 с $\rho_1 = \dfrac{V_1^2}{a_{n_1}} = 14{,}8$ см.

1.5. Задание движения точки в полярных координатах

Уравнения движения. Когда точка движется все время в одной и той же плоскости, ее положение можно определить полярными координатами r и φ (рис. 15).

При движении точки эти координаты с течением времени изменяются. Следовательно, уравнения движения точки в полярных координатах будут равны:

$$r = f_1(t),\ \varphi = f_2(t). \qquad (44)$$

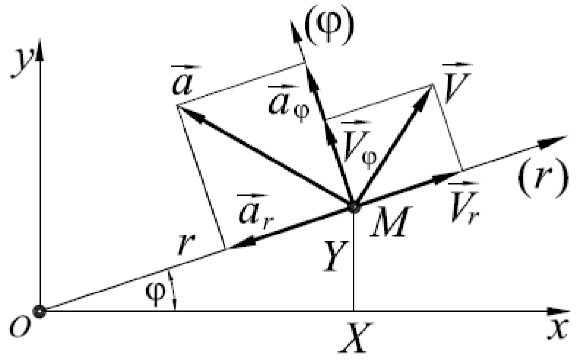


Рис. 15

Скорость точки. Выражая декартовы координаты точки M через полярные, получаем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Проекции скорости $\overline{V}$ на оси декартовых координат:

$$V_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi,$$

$$V_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi,$$

где $V_r = \dot{r}$ – проекция скорости на радиальное направление;

$V_\varphi = r\dot{\varphi}$ – проекция скорости на трансверсальное направление φ.

Модуль скорости будет равен:

$$V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\ . \tag{45}$$

Ускорение точки. Для проекций ускорения на неподвижные координатные оси будем иметь:

$$a_x = \ddot{x} = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - r\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi},$$
$$a_y = \ddot{y} = \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + r\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi}.$$

Модуль ускорения точки будет равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\varphi} + \ddot{r}\varphi\right)^2}. \tag{46}$$

При этом величина, стоящая под знаком радикала в первой скобке, равна радиальной составляющей $\overline{a}_r$, а во второй – трансверсальной составляющей $\overline{a}_\varphi$ (рис. 15).

Задачи для самоконтроля

Задача 1.1

Положение линейки AB определяется углом φ = 0,5t (рис. 16).

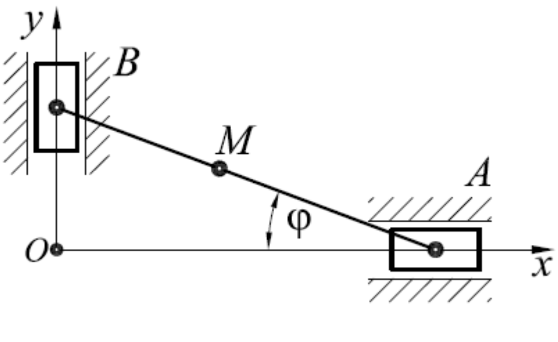


Рис. 16

Определить проекцию скорости точки M в (см/с) на ось Ox в момент времени t = 2 с, если расстояние BM = 0,2 м.

Задача 1.2

Дано уравнение движения точки $x = \sin \pi t$. Определить скорость в ближайший после начала движения момент времени t, когда координата x = 0,5 м.

Задача 1.3

Точка движется по прямой с постоянным ускорением $a = 0{,}3$ м/с^2. Определить начальную скорость, если через 6 с скорость точки стала равной 3 м/с.

Задача 1.4

Точка начинает движение из состояния покоя и движется по прямой с постоянным ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. Определить путь, который точка пройдет за промежуток времени от $t_1 = 4$ с до $t_2 = 10$ с.

Задача 1.5

Даны уравнения движения точки: $x = 0{,}01t^3$, $y = 200 - 10t$ (x, y выразить в м, t в с). Определить ускорение в момент времени, когда точка пересекает ось Ox.

Задача 1.6

Проекции скорости точки во время движения определяются выражениями: $V_x = 0{,}2t^2$, $V_y = 3$ м/с. Определить касательное ускорение в момент времени $t = 2{,}5$ с.

Задача 1.7

Дано уравнение движения точки по траектории $S = 5t$. Определить радиус кривизны траектории, когда нормальное ускорение точки $a_n = 3$ м/с^2.

Задача 1.8

Центрифуга для тренировки пилотов устроена так, что центр кабины с человеком находится на расстоянии $r = 5$ м от оси вращения. Определить скорость центра кабины в случае, когда ее нормальное ускорение $a_n = 5g$.

Задача 1.9

Задано уравнение движения точки, по криволинейной траектории: $S = 0{,}2t^2 + 0{,}3t$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 3$ с, в этот момент радиус кривизны траектории $\rho = 1{,}5$ м.

Задача 1.10

Точка движется по окружности радиусом $r = 200$ м из состояния покоя с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 1$ м/с^2. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 20$ с.

2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Простейшими и основными движениями твердого тела являются поступательное движение и вращательное движение вокруг неподвижной оси. В кинематике твердого тела изучают кинематические характеристики как движения тела в целом, так и движения отдельных его точек.

2.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором всякая прямая, неизменно связанная с этим телом, остается параллельной своему начальному положению. Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми линиями.

Примеры: движение кузова автомобиля на прямолинейном участке дороги, движение спарника колес электровоза и др.

Свойства поступательного движения определяются следующей **теоремой**: при поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Доказательство

Пусть отрезок AM соединяет две произвольные точки тела, совершающего поступательное движение (рис. 17). Положение точек A и M определим их радиусами-векторами $\bar{r}_M$ и $\bar{r}_A$. Проведем вектор $\overline{AM} = \bar{r}$, соединяющий точки A и M. Тогда

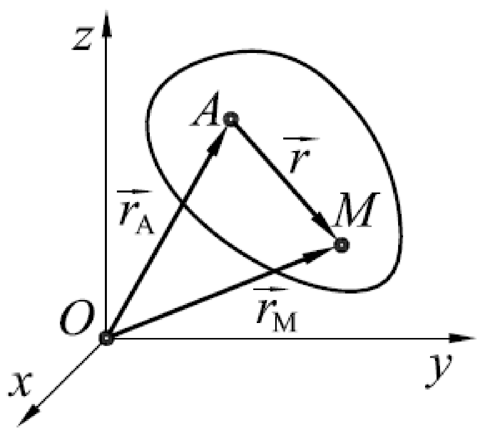


Рис. 17

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}, \tag{47}$$

при этом $\bar{r}$ постоянен по величине, так как тело твердое, и по направлению, так как тело движется поступательно. Из соотношения (47) видно, что траектория точки M получается из траектории точки A

параллельным смещением точек этой траектории на постоянный вектор $\overline{r}$. Таким образом, траектории точек A и M будут одинаковыми кривыми, которые при наложении совпадают.

Взяв производные по времени от обеих частей (47), получим $\dot{\overline{r}}_M = \dot{\overline{r}}_A + \dot{\overline{r}}$ и так как $\overline{r} - \text{const}$, то $\dot{\overline{r}} = 0$, следовательно, $\dot{\overline{r}}_M = \dot{\overline{r}}_A$ или $\overline{V}_M = \overline{V}_A$. Дважды дифференцируя (47) по времени, имеем: $\overline{a}_M = \overline{a}_A$, т.е. теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения какой-нибудь одной его точки, т.е. к задаче кинематики точки.

2.2. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором хотя бы две точки, принадлежащие телу или неизменно связанные с ним, остаются во все время движения неподвижными (рис. 18).

Прямая, проходящая через эти две точки, называется *осью вращения*. Очевидно, что все точки, лежащие на оси вращения, неподвижны, а точки, не лежащие на ней, описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, с центрами на этой оси.

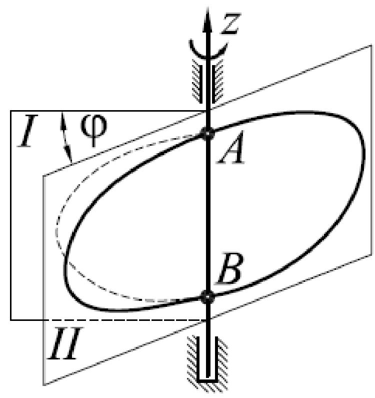


Рис. 18

Проведем через ось вращения неподвижную плоскость *I* и подвижную плоскость *II*, неизменно связанную с телом и вращающуюся вместе с ним. Двугранный угол φ между этими полуплоскостями называется углом поворота тела. Условимся считать угол поворота φ положительным, если, смотря навстречу оси вращения, можно увидеть его отложенным против движения часовой стрелки, и отрицательным – если по часовой стрелке. Измеряется угол φ в радианах. При известном числе оборотов N тела угол поворота определяется по формуле:

$$\varphi = 2\pi N. \tag{48}$$

При вращении тела угол поворота φ непрерывно изменяется с течением времени. Следовательно, для определения положения тела в любой момент времени необходимо знать:

$$\varphi = f(t). \tag{49}$$

Уравнение (49) называется кинематическим уравнением вращательного движения твердого тела.

Угловая скорость и угловое ускорение тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела является его угловая скорость и угловое ускорение.

Угловая скорость характеризует быстроту вращения. Если за малый промежуток времени Δt угол поворота изменяется на $\Delta\varphi$, то алгебраическая величина средней угловой скорости тела за время Δt будет $\tilde{\omega}_{cp} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. При стремлении Δt к нулю получаем алгебраическую величину угловой скорости тела в момент t:

$$\tilde{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{т.е. } \tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{50}$$

Если $\tilde{\omega} = \dot{\varphi} > 0$, то угол φ увеличивается с течением времени, т.е. вращение тела происходит в положительном направлении отсчета угла φ. Если $\tilde{\omega} = \dot{\varphi} < 0$, то угол поворота с течением времени уменьшается, т.е. тело вращается в обратную сторону. Таким образом, знак $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ указывает направление вращения, а абсолютное значение равно угловой скорости тела, т.е. $\omega = |\tilde{\omega}| = |\dot{\varphi}|$.

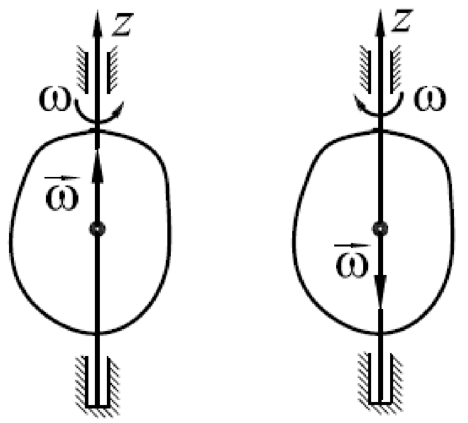


Рис. 19

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\overline{\omega}$, направленного вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки (рис. 19), и его модуль равен $\omega = |\dot{\varphi}|$. Вектор $\overline{\omega}$ – скользящий вектор. Он может быть приложен в любой точке на оси вращения.

Единица измерения угловой скорости в системе СИ – $1\ \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 1\ \text{с}^{-1}$.

Угловое ускорение тела характеризует быстроту изменения угловой скорости. Если за промежуток Δt изменение алгебраической величины угловой скорости равно $\Delta\tilde{\omega}$, то алгебраическая величина углового ускорения за время Δt равна $\tilde{\varepsilon}_{cp} = \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t}$. При стремлении Δt к нулю получаем алгебраическую величину углового ускорения в момент *t*:

$$\tilde{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \dot{\tilde{\omega}}. \qquad (51)$$

С учетом формул (50) имеем:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \qquad (52)$$

Если знаки $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ одинаковы, то тело вращается ускорено, а если различны – замедленно.

Модуль углового ускорения $\varepsilon = |\tilde{\varepsilon}| = |\dot{\tilde{\omega}}| = |\ddot{\varphi}|$.

Угловое ускорение, как и угловую скорость, можно изображать скользящим вектором, направленным по оси вращения, причем

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\bar{\omega}}. \qquad (53)$$

Этот вектор совпадает с направлением вектора $\bar{\omega}$, если вращение ускоренное (рис. 20, *а*), и противоположен направлению вектора $\bar{\omega}$, если вращение замедленное (рис. 20, *б*).

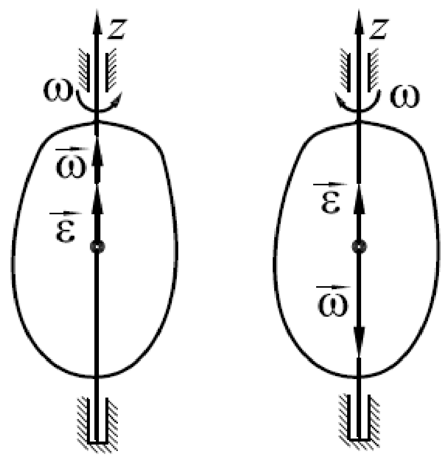


Рис. 20

Единица измерения углового ускорения в системе СИ – $1\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 1\ \text{с}^{-2}$.

Равнопеременное и равномерное вращения тела. Вращение тела с постоянной угловой скоростью называется *равномерным*. Составим уравнение равномерного вращения тела, принимая положительное направление отсчета угла φ совпадающим с направлением вращения. В этом случае $\omega = \tilde{\omega} = \dot{\varphi}$, так как $\tilde{\omega} > 0$. В связи с тем, что $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} - \text{const}$ разделяя переменные, получаем $d\varphi = \omega \cdot dt$.

Проинтегрируем полученное уравнение в пределах, соответствующих начальному моменту $t_0 = 0$ и произвольному моменту времени t:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt, \qquad \varphi - \varphi_0 = \omega t,$$

откуда
$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{54}$$

Уравнение (54) является уравнением равномерного вращения тела. Если $\varphi_0 = 0$, то $\varphi = \omega t$.

Из уравнения (54) $\quad \omega = \dfrac{\varphi - \varphi_0}{t}$.

Если угловую скорость измерять в оборотах в минуту, то $\omega = \dfrac{2\pi n}{60} = \dfrac{\pi n}{30}$, где n – число оборотов в минуту, ω – угловая скорость в $с^{-1}$.

Вращение тела, при котором угловое ускорение постоянно, называют равнопеременным вращением, т.е. $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{d\tilde{\omega}}{dt} - \text{const}$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\varepsilon} dt, \qquad \int_{\tilde{\omega}_0}^{\tilde{\omega}} d\tilde{\omega} = \int_0^t \tilde{\varepsilon} dt, \qquad \tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 = \tilde{\varepsilon} t,$$

откуда
$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\varepsilon} t. \tag{55}$$

Но $\tilde{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt}$, поэтому еще раз разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\varepsilon} t, \qquad \varphi - \varphi_0 = \tilde{\omega}_0 t + \frac{\tilde{\varepsilon} t^2}{2}, \qquad \varphi = \varphi_0 + \tilde{\omega}_0 t + \frac{\tilde{\varepsilon} t^2}{2}. \tag{56}$$

Уравнение (56) является уравнением равнопеременного вращения твердого тела. Если $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ и $\tilde{\varepsilon} = \ddot{\varphi}$ имеют одинаковые знаки, то вращение равноускоренное, а если разные – равнозамедленное. Если вращение тела происходит в одну сторону, то, приняв положительное направление отсчета угла φ совпадающим с направлением вращения, получим, что $\tilde{\omega} = \omega$, так как $\tilde{\omega} > 0$, а $\tilde{\varepsilon} = \pm\varepsilon$, где знак плюс соответствует равноускоренному вращению, а знак минус – равнозамедленному. С учетом этого формулам (55) и (56) можно придать вид:

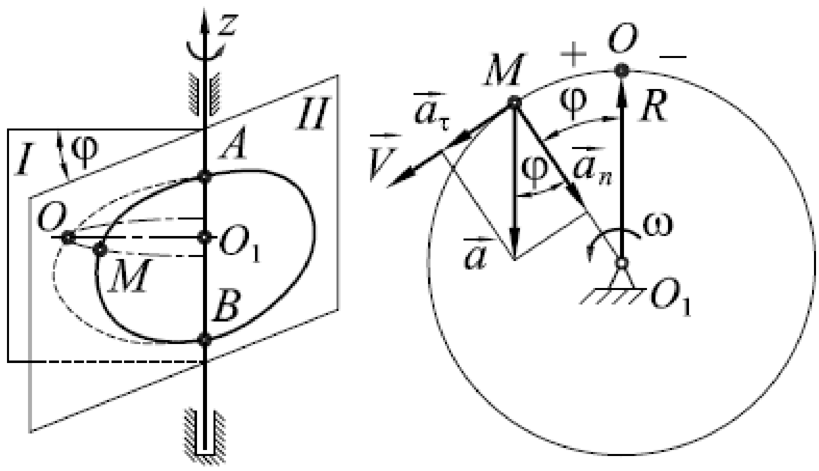
$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t, \tag{57}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}. \tag{58}$$

2.3. Скорости и ускорения точек тела при вращательном движении

Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение являются кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела. Перейдем к рассмотрению кинематических характеристик отдельных точек этого тела.

Рассмотрим движение какой-нибудь точки *M* вращающегося тела.



а *б*

Рис. 21

Радиус окружности, которую описывает точка *M*, обозначим *R*; точку пересечения этой окружности с неподвижной полуплоскостью *I – O* (рис. 21, *а*). Подвижную полуплоскость проведем так, чтобы она проходила через точку *M* (рис. 21, *б*). Будем определять положение точки *M* на траектории дуговой координатой *S*, отсчитываемой от неподвижной точки *O*, а за положительное направление отсчета *S* примем положительное направление отсчета угла φ. Так как φ – центральный угол, то длина дуги *S* будет $S = R\varphi$. Из изложенного видно, что движение точки сводится к естественному способу задания движения, а поэтому при определении скорости и ускорения воспользуемся формулами (25), (35), (36).

Определим модуль скорости точки *M*, называемой *линейной* или вращательной скоростью:

$$V = \left|\dot{S}\right| = R\left|\dot{\varphi}\right| = \omega \cdot R. \tag{59}$$

Следовательно, линейная скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, по величине равна произведению величины угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения. Линейная скорость направлена по касательной к окружности в сторону вращения и, таким образом, перпендикулярна радиусу *R*.

Ускорение точки *M* определим по его составляющим. Модули касательного (вращательного), нормального (центростремительного) ускорений будут определяться по следующим формулам:

$$a_\tau = \left|\ddot{S}\right| = R\left|\ddot{\varphi}\right| = \varepsilon \cdot R, \tag{60}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R. \tag{61}$$

Если $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$ имеют одинаковые знаки, то вектор $\bar{a}_\tau$ совпадает с направлением вектора $\bar{V}$, а если разные – то противоположен $\bar{V}$.

Для величины ускорения точки *M* получаем следующее выражение:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 \cdot R^2 + \omega^4 \cdot R^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{62}$$

Направление ускорения находим по tgα:

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{63}$$

Пользуясь понятием вектора угловой скорости $\overline{\omega}$, легко получить векторное выражение линейной скорости точки. Изобразим вектор угловой скорости $\overline{\omega}$, радиус-вектор точки $\overline{r}$ относительно произвольной точки O оси вращения и линейную скорость $\overline{V}$ точки M (рис. 22).

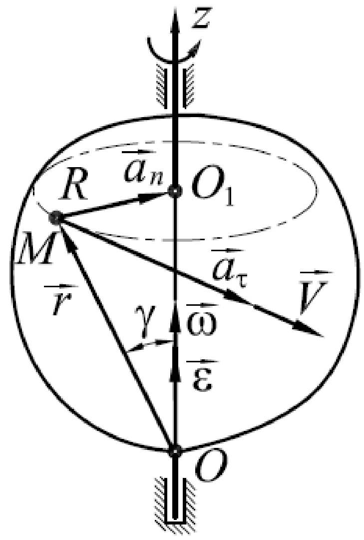


Рис. 22

Рассмотрим векторное произведение $\overline{\omega} \times \overline{r}$. Его модуль равен $|\overline{\omega} \times \overline{r}| = \omega \cdot r \sin\gamma = \omega \cdot R$, так как $r \times \sin\gamma = R$. Из полученной формулы видно, что $|\overline{\omega} \times \overline{r}| = V$. Вектор $\overline{\omega} \times \overline{r}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{r}$, т.е. к плоскости треугольника OMO_1, и направлен так, чтобы поворот вектора $\overline{\omega}$ на угол γ до совмещения его с вектором $\overline{r}$ представлялся наблюдателю, смотрящему с конца вектора $\overline{\omega} \times \overline{r}$ на плоскость OMO_1 происходящим против часовой стрелки. Видно, что векторы $\overline{V}$ и $\overline{\omega} \times \overline{r}$ параллельны и направлены в одну и ту же сторону, а так как они еще имеют и равные модули, то равны между собой. Следовательно,

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}, \tag{64}$$

т.е. скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; равна векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольно выбранной точки, лежащей на оси вращения. Формула (64) называется формулой Эйлера.

Взяв производные по времени от $\overline{V}$, получим $\overline{a} = \dot{\overline{V}} = \dot{\overline{\omega}} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \dot{\overline{r}}$, но $\dot{\overline{\omega}} = \overline{\varepsilon}$, $\dot{\overline{r}} = \overline{V}$, поэтому $\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V}$.

Определяя модули и направления этих векторных произведений, подобно тому, как это сделано для скорости, можно доказать, что

$$\overline{\varepsilon} \times \overline{r} = \overline{a}_\tau, \tag{65}$$

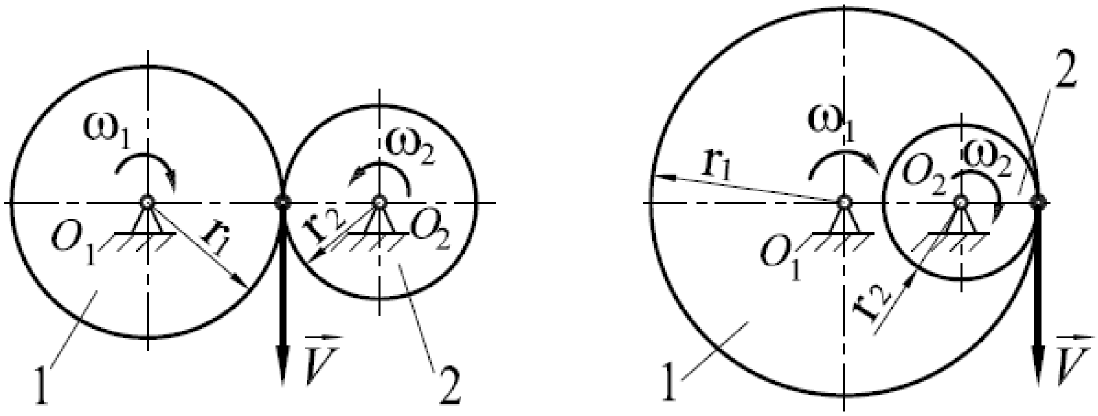
$$\overline{\omega} \times \overline{V} = \overline{a}_n. \tag{66}$$

Итак, касательное ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению углового ускорения тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольно выбранной точки, лежащей на оси вращения тела; нормальное ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению угловой скорости тела на скорость этой точки.

2.4. Преобразование вращательного движения

Для передачи вращения от одного вала (ведущего), к другому (ведомому), служат передаточные механизмы. Если оси ведущего и ведомого валов параллельны или пересекаются, то вращение можно передать при помощи фрикционной или зубчатой передач. Кроме этих передач существует передача на расстояние при помощи гибкой связи (ремня, троса, цепи).

Рассмотрим наиболее часто применяемые рядовые передачи, т.е. такие, в которых все оси колес, находящихся в зацеплении, неподвижны (рис. 23). При расчете таких передач используется то, что линейная скорость $\bar{V}$ в точке соприкосновения (при отсутствии проскальзывания) одинакова для обоих колес.



внешнее зацепление внутреннее зацепление

Рис. 23

Обозначая угловые скорости колес ω_1 и ω_2, а их радиусы r_1 и r_2 можно записать

$$V = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \,,$$

откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \qquad (67)$$

Так как число зубьев колес пропорционально длине окружности, а длина окружности пропорциональна радиусу, то вместо отношения радиусов можно взять отношение чисел зубьев z_1 и z_2, т.е.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \tag{68}$$

Учитывая, что при внешнем зацеплении колеса вращаются в противоположных направлениях, для алгебраических величин угловых скоростей получим:

$$\left(\frac{\varpi_1}{\varpi_2}\right)_{внешн} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}, \qquad \left(\frac{\varpi_1}{\varpi_2}\right)_{внутр} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \tag{69}$$

На практике применяются также серии колес с неподвижными осями вращения в виде последовательного ряда с «паразитными» колесами и последовательного ряда с кратным зацеплением. Для серии с «паразитными» колесами (рис. 24) имеем:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{z_3}{z_2}.$$

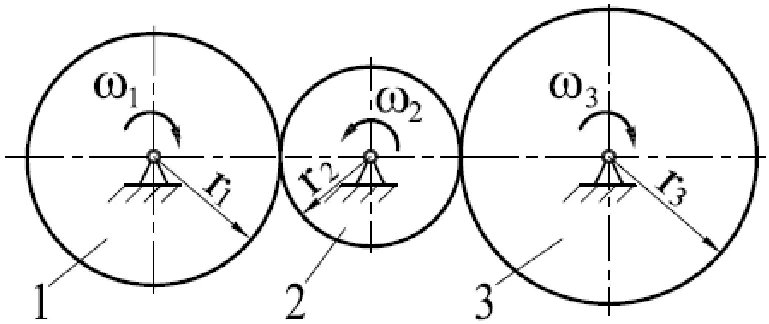


Рис. 24

Перемножив левые и правые части, получим:

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}, \tag{70}$$

т.е. отношение угловых скоростей ведущего колеса к угловой скорости ведомого колеса не зависит от радиусов (чисел зубьев) «паразитных» колес.

Для алгебраических значений угловых скоростей при зацеплении n колес будем иметь:

$$\frac{\varpi_1}{\varpi_n} = (-1)^k \cdot \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \cdot \frac{z_n}{z_1}, \qquad (71)$$

где k – число внешних зацеплений.

Для рядовой передачи с кратным зацеплением (рис. 25):

$\frac{\omega_1}{\omega_{2-3}} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}$ – для зацепления колес *1* и *3*,

$\frac{\omega_{2-3}}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_2} = \frac{z_4}{z_2}$ – для зацепления колес *2* и *4*.

Перемножив левые и правые части этих равенств, получим:

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{r_3 \cdot r_4}{r_2 \cdot r_1} = \frac{z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_2}.$$

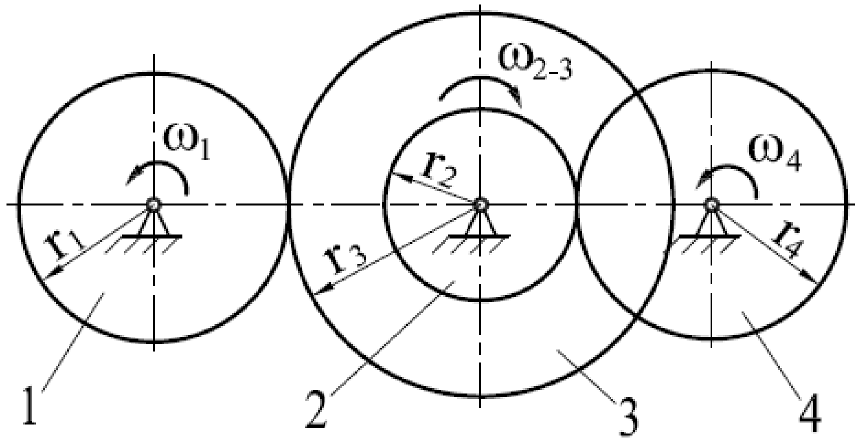


Рис. 25

Пример. Механизм состоит из ступенчатых колес *1 – 4*, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей (рис. 26), зубчатой рейки *CD* и груза *E*, привязанного к концу нити, намотанной на барабан колеса *4*. Радиусы равны: колесо *1* – r_1 = 2 см, R_1 = 4 см; колесо *2* – r_2 = 8 см, R_2 = 12 см; колесо *3* – r_3 = 8 см, R_3 = 16 см; колесо *4* – r_4 = 6 см, R_4 = 24 см.

Рейка *CD* движется по закону $S = 10t^3$, где *S* измеряется в см, *t* – в с. Определить в момент времени $t_1 = 2$ с угловую скорость и угловое ускорение колеса *2*, а также скорость и ускорение груза *E* и точки *B*, лежащей на колесе *4* и показанной на рис. 26.

Решение

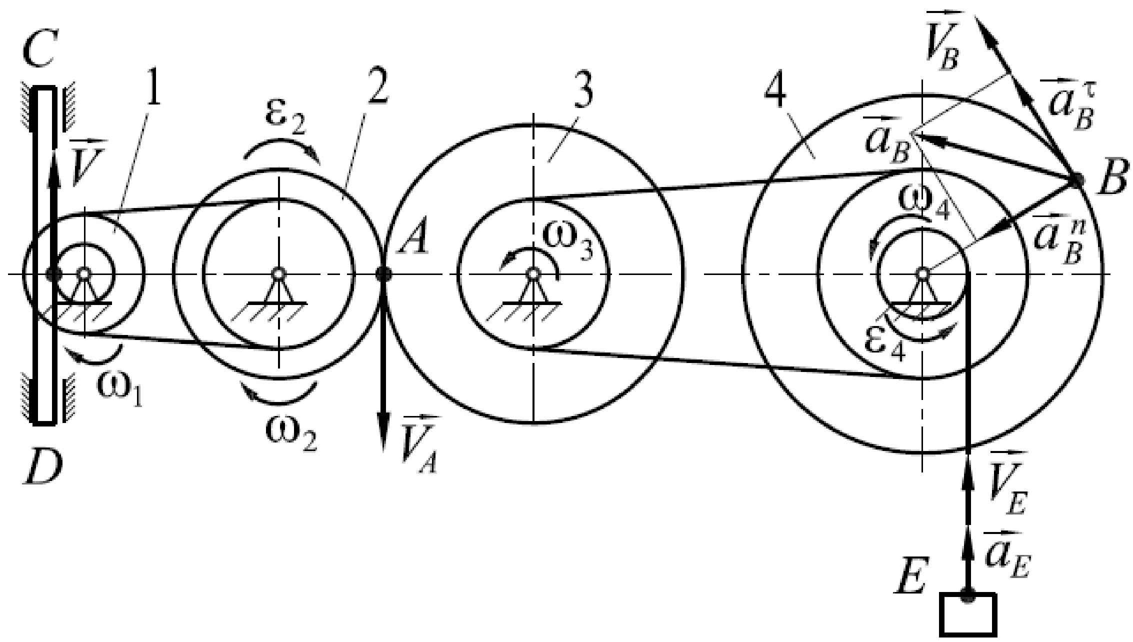


Рис. 26

По известному закону движения рейки *CD* находим ее скорость $V = \dot{S} = 30t^2$. Так как рейка и колесо *1* малого радиуса находятся в зацеплении, то находим угловую скорость колеса *1* $\omega_1 = \dfrac{V}{r_1} = 15t^2$.

В связи с тем, что скорости всех точек ремня одинаковы, имеем: $\omega_1 R_1 = \omega_2 r_2$, откуда $\omega_2 = \dfrac{\omega_1 R_1}{r_2} = \dfrac{15}{2}t^2$, при $t_1 = 2\,\text{с}$, $\omega_2 = 30\,\text{с}^{-1}$.

Зная ω_2, находим угловое ускорение второго колеса $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 15t$ при $t_1 = 2$ с $\varepsilon_2 = 30\,\text{с}^{-2}$. Направления $\overline{V}$ и угловых скоростей показаны на рис. 26. Так как скорость точки *A* для колес *2* и *3* одинакова, то $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$, откуда $\omega_3 = \dfrac{\omega_2 R_2}{R_3} = \dfrac{45}{8}t^2$.

Из равенства скоростей точек ремня, соединяющего *3* и *4* колеса, получим: $\omega_3 r_3 = \omega_4 r_4$, а поэтому $\omega_4 = \dfrac{\omega_3 r_3}{r_4} = \dfrac{15}{2}t^2$.

По известной ω_4 находим $\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = 15t$ при $t_1 = 2$ с $\omega_4 = 30$ с$^{-1}$ $\varepsilon_4 = 30$ с$^{-2}$. Скорость и ускорение точки *B* в момент $t_1 = 2$ с таковы:

$$V_B = \omega_4 R_4 = 720 \text{ см/с}, \qquad a_B^\tau = \varepsilon_4 \cdot R_4 = 720 \text{ см/с}^2,$$

$$a_B^n = \omega_4{}^2 \cdot R_4 = 21600 \text{ см/с}^2,$$

$$a_B = \sqrt{a_B^{n\,2} + a_B^{\tau\,2}} = 21612 \text{ см/с}^2 = 216{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Находим скорость и ускорение груза *E* в момент $t_1 = 2$ с:

$V_E = \omega_4 \cdot r_4 = 90t^2 = 360$ см/с^2, $a_B = a_E^\tau$ так как груз движется прямолинейно и равномерно $a_E^n = 0$, $a_E = \dot{V}_E = 180t = 360$ см/с^2.

Задачи для самоконтроля

Задача 2.1

Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = t^3 + 2$. Определить угловую скорость тела в данный момент времени, когда угол поворота $\varphi = 10$ рад.

Задача 2.2

Угловое ускорение тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 3t^2$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 2$ рад/с.

Задача 2.3

Скорость точки тела на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения изменяется по закону $V = 4t^2$. Определить угловое ускорение данного тела в момент времени $t = 2$ с.

Задача 2.4

Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 1 + t$. Определить ускорение точки этого тела на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения в момент времени $t = 1$ с.

Задача 2.5

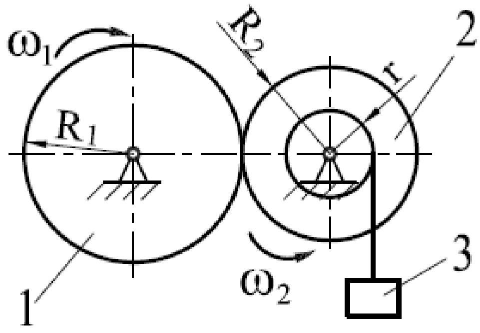


Рис. 27

Угловая скорость зубчатого колеса *1* изменяется по закону $\omega_1 = 2t^2$ (рис. 27) Определить ускорение груза *3* в момент времени $t = 2$ с, если радиусы шестерен R_1=l м, R_2=0,8 м и радиус барабана $r = 0{,}4$ м.

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия и определения

Ранее рассматривалось движение точки относительно некоторой системы координат $Oxyz$ (системы отсчета), которую считали неподвижной.

Представим, что мы наблюдаем движение точки M по отношению к некоторой системе координат $O_1x_1y_1z_1$, которая движется относительно системы $Oxyz$, условно принимаемой за неподвижную (рис. 28).

Движение точки M по отношению к подвижным осям называется *относительным* движением. Это движение фиксирует наблюдатель, неизменно связанный с подвижной системой отсчета. Относительной траекторией, скоростью и ускорением точки M называют ее траекторию, скорость $\overline{V}_r$ и ускорение $\overline{a}_r$ относительно подвижной системы отсчета.

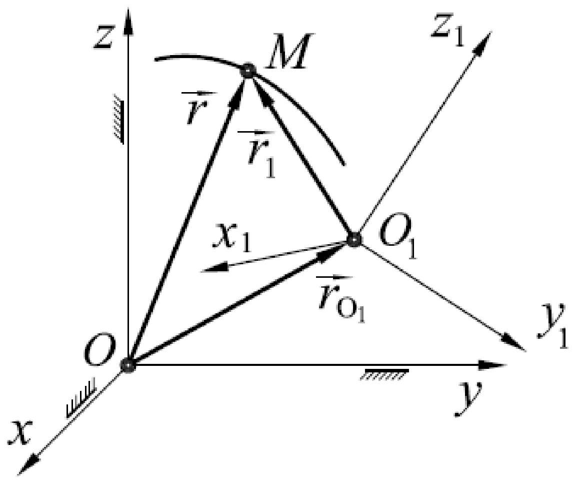


Рис. 28

Движение подвижных осей по отношению к неподвижной системе отсчета называется *переносным*. Так как вместе с подвижной системой отсчета $O_1x_1y_1z_1$ будут перемещаться и все неизменно связанные с ней точки, то переносной скоростью $\overline{V}_e$ и переносным ускорением $\overline{a}_e$ называют скорость и ускорение, которые имела бы точка в данный момент времени, будучи неразрывно скрепленной с подвижной системой отсчета.

Чтобы выяснить характер переносного движения в какой-то момент времени, следует мысленно прекратить (остановить) относительное движение точки, скрепить ее неизменно с подвижной системой отсчета и установить, какое движение она будет иметь как точка, неразрывно скрепленная с подвижной системой. Переносной скоростью и переносным ускорением можно также назвать скорость и ускорение той точки подвижной системы, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка.

Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета называется абсолютным. Абсолютной траекторией, скоростью $\overline{V}_a$ и ускорением $\overline{a}_a$ называют ее траекторию, скорость и ускорение относительно неподвижной системы отсчета. Абсолютное движение точки можно назвать также сложным или результирующим, поскольку его рассматривают как результат сложения относительного и переносного движений, которые по отношению к абсолютному являются составляющими. Примерами сложного движения являются перемещение тела по палубе движущегося корабля; движение человека по лестнице эскалатора.

Основная задача кинематики в случае сложного движения точки состоит в установлении связи между кинематическими характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений.

3.2. Теоремы сложения скоростей и ускорений точки при переносном поступательном движении

Пусть движение точки M относительно подвижных осей $O_1x_1y_1z_1$ задано уравнениями:

$$x_1 = f_1(t),\ y_1 = f_2(t),\ z_1 = f_3(t). \tag{72}$$

Предположим, что система осей $O_1x_1y_1z_1$ движется относительно неподвижной системы $Oxyz$ поступательно (рис. 29). Обозначим скорость точки O_1 в этом движении через $\overline{V}_{01}$. Так как при поступательном движении твердого тела все его точки в каждый данный момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения, то скорость и ускорение любой точки, неизменно связанной с подвижной системой равны скорости и ускорению точки O_1. Отсюда следует, что переносные скорость и ускорение точки M в каждый момент времени равны скорости и ускорению точки O_1 в тот же момент времени:

$$\overline{V}_e = \overline{V}_{01}, \tag{73}$$

$$\overline{a}_e = \overline{a}_{01}. \tag{74}$$

Найдем относительные скорость и ускорение точки M. Обозначая орты подвижных осей $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, получим для радиуса-вектора следующее:

$$\bar{r}_1 = \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1. \tag{75}$$

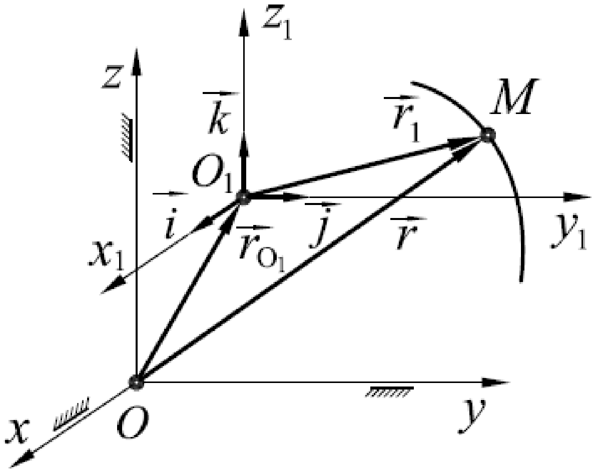


Рис. 29

Используя координатный и векторный способы задания движения точки, находим относительную скорость и относительное ускорение точки:

$$\bar{V}_r = \bar{i}\dot{x}_1 + \bar{j}\dot{y}_1 + \bar{k}\dot{z}_1, \tag{76}$$

$$\bar{a}_r = \bar{i}\ddot{x}_1 + \bar{j}\ddot{y}_1 + \bar{k}\ddot{z}_1. \tag{77}$$

Для определения абсолютной скорости точки M, т.е. скорости этой точки относительно системы $Oxyz$, необходимо взять производную по времени от радиуса-вектора $\bar{r}$ точки M, проведенного из неподвижного центра O, т.е. $\dot{V}_a = \dot{\bar{r}}$. Из рис. 29 видно, что

$$\bar{r} = \bar{r}_{01} + \bar{r}_1 = \bar{r}_{01} + \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1. \tag{78}$$

Возьмем производную по времени от обеих частей равенства (78) и примем во внимание, что при поступательном движении подвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ являются постоянными векторами, так как их модули и направления не меняются с течением времени, тогда получим $\bar{V}_a = \dot{\bar{r}}_{01} + \bar{i}\dot{x}_1 + \bar{j}\dot{y}_1 + \bar{k}\dot{z}_1$.

Учитывая, что $\dot{\bar{r}}_{01} = \bar{V}_{01}$, а также равенства (73) и (76), имеем

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e. \tag{79}$$

Это равенство выражает ***теорему сложения скоростей***: абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

Если известны переносная и относительная скорости точки M и угол α между ними (рис. 30), то модуль абсолютной скорости будет равен:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e \cdot V_r \cos\alpha}\,.$$

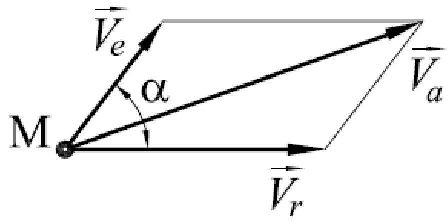


Рис. 30

Если $\alpha = 0$, то $V_a = V_e + V_r$.

Если $\alpha = \pi$, то $V_a = |V_e - V_r|$.

Если $\alpha = \pi/2$, то $V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$.

Для нахождения абсолютного ускорения точки M нужно найти вторую производную по времени от $\bar{r}$. Учитывая равенство (78) и то, что при переносном поступательном движении орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – постоянные векторы, имеем $\bar{a}_a = \ddot{\bar{r}}_{01} + \bar{i}\ddot{x}_1 + \bar{j}\ddot{y}_1 + \bar{k}\ddot{z}_1$.

Так как $\ddot{\bar{r}}_{01} = \bar{a}_{01}$ и принимая по внимание равенства (74) и (77), получаем:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r \tag{80}$$

Отсюда ***теорема сложения ускорений*****:** в том случае, когда переносное движение является поступательным, абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений точки. В этом случае абсолютное ускорение точки находится по тому же правилу параллелограмма, что и абсолютная скорость.

3.3. Теоремы сложения скоростей и ускорений точки при переносном вращательном движении

Пусть подвижная система отсчета $O_1x_1y_1z_1$ вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\bar{\omega}_e$ (рис. 31), а движение точки M относительно подвижной системы определяется уравнениями: $x_1 = f_1(t)$, $y_1 = f_2(t)$, $z_1 = f_3(t)$.

Если обозначить радиусы-векторы $\overline{OO_1}$, $\overline{OM}$, $\overline{O_1M}$ соответственно через $\bar{r}_{01}$, $\bar{r}$, $\bar{r}_1$, то, как и в п. 3.2, будем иметь:

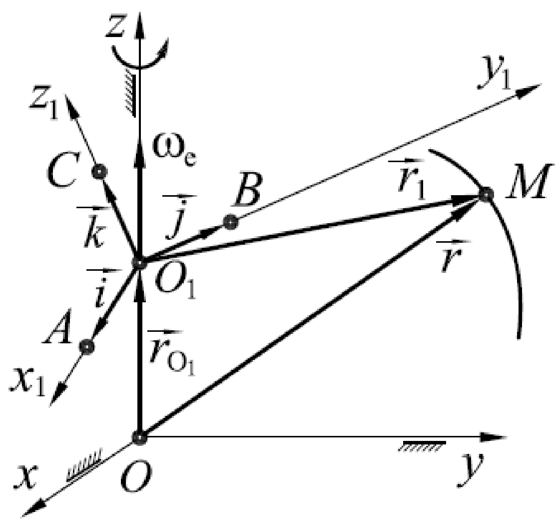


Рис. 31

$$\bar{r}_1 = \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1, \tag{81}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_{01} + \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1, \tag{82}$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – орты подвижных осей.

Используя формулы разложения относительной скорости и относительного ускорения по подвижным осям, получаем:

$$\overline{V}_r = \bar{i}\dot{x}_1 + \bar{j}\dot{y}_1 + \bar{k}\dot{z}_1, \tag{83}$$

$$\bar{a}_r = \bar{i}\ddot{x}_1 + \bar{j}\ddot{y}_1 + \bar{k}\ddot{z}_1. \tag{84}$$

Найдем переносные скорость и ускорение точки M. Для этого нужно точку M неизменно связать с подвижной системой, т.е. нужно считать ее координаты x_1, y_1, z_1 постоянными. Отсюда следует, что переносная скорость точки M равна производной от радиуса-вектора $\bar{r}$ этой точки по времени, причем при вычислении этой производной координаты x_1, y_1, z_1 необходимо рассматривать как постоянные:

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_e &= \dot{\bar{r}} \\ \bar{a}_e &= \ddot{\bar{r}} \end{aligned}\right\} x_1 y_1 z_1 - \text{const}.$$

Учитывая, при этом формулу (82), имеем:

$$\overline{V}_e = \dot{\bar{r}}_{01} + x_1\dot{\bar{i}} + y_1\dot{\bar{j}} + z_1\dot{\bar{k}}, \quad \bar{a}_e = \ddot{\bar{r}}_{01} + x_1\ddot{\bar{i}} + y_1\ddot{\bar{j}} + z_1\ddot{\bar{k}}, \tag{85}$$

причем $\dot{\bar{r}}_{01} = \ddot{\bar{r}}_{01} = 0$, так как $\bar{r}_{01} - \text{const}$. При получении формул (85) нужно принять во внимание, что при вращательном переносном движении орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ являются переменными векторами в связи с тем, что изменяется их направление в пространстве.

Найдем абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M. Абсолютная скорость точки M равна производной по времени от радиуса-вектора $\bar{r}$. Воспользовавшись выражением (82) и учитывая то, что переменными являются и координаты x_1, y_1, z_1 и орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ получаем:

$$\bar{V}_a = \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_{01} + \bar{i}\dot{x}_1 + \bar{j}\dot{y}_1 + \bar{k}\dot{z}_1 + x_1\dot{\bar{i}} + y_1\dot{\bar{j}} + z_1\dot{\bar{k}}.$$

Сопоставляя полученную формулу с выражениями (83) и (85), имеем

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e. \tag{86}$$

Это равенство выражает ***теорему сложения скоростей*** в общем случае: абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей этой точки.

Абсолютное ускорение $\bar{a}_a$ точки M равно второй производной по времени от радиуса-вектора $\bar{r}$:

$$\bar{a}_a = \ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}_{01} + \bar{i}\ddot{x}_1 + \bar{j}\ddot{y}_1 + \bar{k}\ddot{z}_1 + x_1\ddot{\bar{i}} + y_1\ddot{\bar{j}} + z_1\ddot{\bar{k}} + 2\left(\dot{\bar{i}}\dot{x}_1 + \dot{\bar{j}}\dot{y}_1 + \dot{\bar{k}}\dot{z}_1\right).$$

Из сопоставления полученного результата с выражениями (84) и (85) можно записать:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + 2\left(\dot{\bar{i}}\dot{x}_1 + \dot{\bar{j}}\dot{y}_1\dot{\bar{k}}\dot{z}_1\right). \tag{87}$$

Выясним, чему равны производные по времени от ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, т.е. $\dot{\bar{i}}, \dot{\bar{j}}, \dot{\bar{k}}$. Обозначим концы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ точками A, B, C и найдем скорости этих точек. В связи с тем, что подвижная система вращается вокруг оси z, скорость точки A можно найти по формуле Эйлера:

$$\bar{V}_A = \bar{\omega}_e \times \overline{O_1A}, \text{ но } O_1A = \bar{i}, \quad \text{а поэтому } \bar{V}_A = \bar{\omega}_e \times \bar{i}. \tag{88}$$

С другой стороны, скорость точки A равна производной от радиуса-вектора этой точки по времени, т.е.

$$\bar{V}_A = \dot{\bar{r}}_A = \dot{\bar{r}}_{01} + \dot{\bar{i}} = \dot{\bar{i}}, \tag{89}$$

так как $\dot{\bar{r}}_{01} = 0$.

Сопоставляя формулы (88) и (89), имеем $\dot{\bar{i}} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}$.

Рассуждая аналогичным образом относительно точек B и C, получим:

$$\dot{\bar{j}} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}, \; \dot{\bar{k}} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}.$$

Тогда третье слагаемое формулы (87) можно записать так:

$$2\left(\dot{\bar{i}}\dot{x}_1 + \dot{\bar{j}}\dot{y}_1 + \dot{\bar{k}}\dot{z}_1\right) = 2\bar{\omega}_e \times \left(\bar{i}\dot{x}_1 + \bar{j}\dot{y}_1 + \bar{k}\dot{z}_1\right),$$

что с учетом выражения (83) дает $2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r$.

Формула (87) будет выглядеть так:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r. \qquad (90)$$

Эта формула определяет ***теорему сложения ускорений***. В том случае, когда переносное движение является вращательным, абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного $\overline{a}_r$, переносного $\overline{a}_e$ и ускорения, равного удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на вектор относительной скорости, которое называется поворотным или ускорением Кориолиса. В этом заключается кинематическая ***теорема Кориолиса***. Ускорение Кориолиса определяется по формуле:

$$\overline{a}_c = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r. \qquad (91)$$

Равенство (90) можно переписать в виде:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c. \qquad (92)$$

Теоретически получено, что теорема Кориолиса справедлива при любом переносном движении. Нетрудно убедиться, что теорема сложения ускорений при переносном поступательном движении является частным случаем теоремы Кориолиса. Действительно, при переносном поступательном движении $\omega_e = 0$, следовательно, $\overline{a}_c = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r = 0$ и $\overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r$, что совпадает с формулой (80).

Из формулы (91) следует, что ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость движущейся точки.

Из этой формулы определяется модуль и направление ускорения Кориолиса. Если обозначить угол между векторами $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$ через α, то модуль ускорения Кориолиса:

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin\alpha\,. \qquad (93)$$

Чтобы определить направление вектора $\overline{a}_c$, которое совпадает с направлением векторного произведения $\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r$, нужно вектор $\overline{\omega}_e$

перенести в точку M (рис. 32) и восстановить из этой точки перпендикуляр к плоскости, в которой лежат векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$; вектор $\overline{a}_c$ будет направлен по этому перпендикуляру так, чтобы, если смотреть с его конца, можно было видеть поворот вектора $\overline{\omega}_e$ на угол α до совмещения его с вектором $\overline{V}_r$, происходящим против часовой стрелки.

Для определения модуля и направления ускорения Кориолиса удобно пользоваться также следующим приемом. Разложим относительную скорость $\overline{V}_r$ на две составляющие $\overline{V}_r^{//}$ и $\overline{V}_r^{/}$ по направлению вектора $\overline{\omega}_e$ и направлению, перпендикулярному к нему (рис. 32).

Так как модуль составляющей $V_r^{/} = V_r \times \sin\alpha$, то $a_c = 2\omega_e V_r^{\prime}$, т.е. кориолисово ускорение равно по модулю удвоенному произведению угловой скорости ω_e переносного вращения на модуль составляющей относительной скорости, перпендикулярной к вектору $\overline{\omega}_e$.

Чтобы получить направление вектора $\overline{a}_c$, достаточно повернуть составляющую $\overline{V}_r^{/}$ относительной скорости, перпендикулярную вектору ω_e, вокруг оси вращения на прямой угол в направлении переносного вращения (правило Жуковского).

Если вектор $\overline{\omega}_e$ перпендикулярен вектору $\overline{V}_r$ (рис. 33), то $\alpha = 90^\circ$ и $\sin\alpha = 1$, следовательно, $a_c = 2\omega_e V_r$. В этом случае три вектора: $\overline{V}_r$, $\overline{\omega}_e$ и $\overline{a}_c$ взаимно перпендикулярны. Чтобы получить направление $\overline{a}_c$ достаточно повернуть вектор $\overline{V}_r$ на прямой угол в направлении переносного вращения.

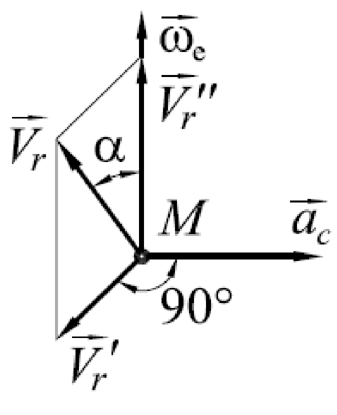


Рис. 32

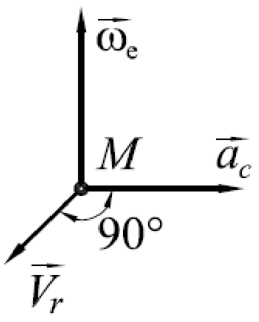


Рис. 33

Такому случаю соответствует пример (рис. 34). Стержень *OA* вращается вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка.

Относительная скорость точки *M* направлена вдоль стержня. Вектор $\overline{a}_c$ получают, поворачивая вектор $\overline{v}_r$ на 90° в направлении вращения.

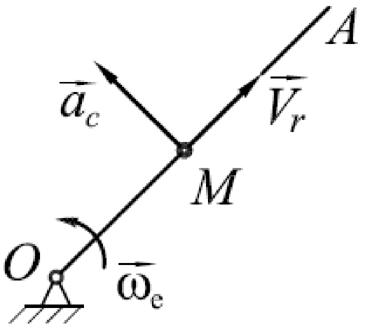


Рис. 34

Ускорение Кориолиса равно нулю в тех случаях, когда:

1) $\omega_e = 0$, т.е. переносное движение является поступательным;

2) $V_r = 0$, т.е. относительная скорость точки обращается в нуль;

3) векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$ параллельны, так как в этом случае $\sin\alpha = 0$.

3.4. Примеры решения задач

При решении задач на сложное движение точки рекомендуется следующая последовательность действий:

1) разложить сложное движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения;

2) изобразить точку в заданном по условию задачи положении;

3) мысленно остановив переносное движение, определить скорость и ускорение точки в относительном движении;

4) мысленно отвлекаясь от относительного движения, найти угловую скорость переносного движения, а также переносную скорость и переносное ускорение точки;

5) по известным векторам $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$ найти ускорение Кориолиса;

6) применив теоремы сложения скоростей и ускорений, найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки. В этом случае часто пользуются методом проекций. Например, при относительном криволинейном движении $\overline{a}_r = \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau$, а при переносном вращательном движении $\overline{a}_e = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau$ и поэтому

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c. \quad (94)$$

Это выражение проецируют на неподвижные оси и находят проекции абсолютного ускорения на эти оси, а затем по известным проекциям находят абсолютное ускорение.

Пример 1. По заданному уравнению относительного движения точки M $OM = S = 20\sin\frac{\pi}{3}t$ и уравнению вращения тела D $\varphi = 4t - 3t^2$ (S измеряется в см, t – в с), найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент $t_1 = 1\,\text{с}$, если $\alpha = 30^\circ$ (рис. 35).

Решение

Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение в прорези тела D относительным (относительное движение – прямолинейное), а вращение тела D – переносным движением.

Находим положение точки M при $t_1 = 1\,\text{с}$.

$$OM = 20\sin\frac{\pi}{3} = 10\sqrt{3} = 17{,}3\ \text{см}.$$

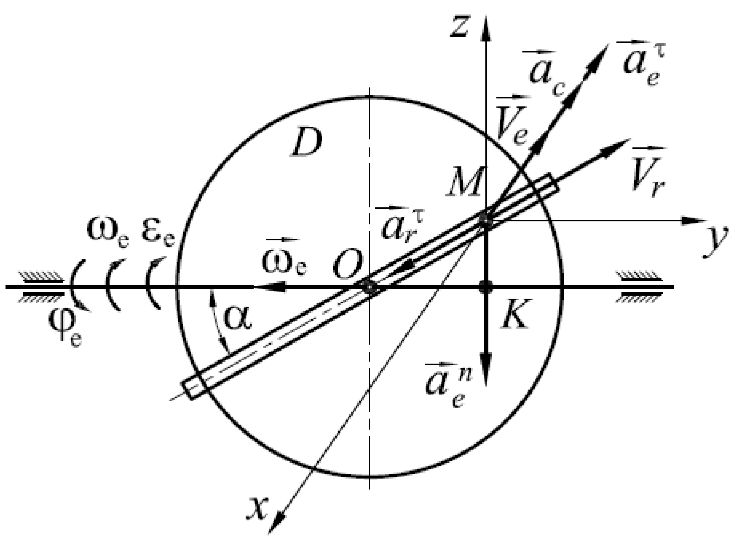


Рис. 35

Определим все кинематические характеристики относительного и переносного движения.

Относительное движение задано естественным способом. Находим относительную скорость V_r:

$$V_r = \dot{S} = (20\sin\frac{\pi}{3}t)'_t = \frac{20\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t,$$

при $t_1 = 1\text{ с}$, $\quad V_r = \dfrac{20\pi}{3\cdot 2} = 10{,}5\ \text{см/с}$.

Так как $V_r > 0$, то вектор $\overline{V}_r$ направлен вдоль прямой *OM* в сторону возрастания *S*.

Находим относительное ускорение точки *M*:

$$\overline{a}_r = \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau = \overline{a}_r^\tau,$$

где $\overline{a}_r^n = 0$, так как движение прямолинейное;

$a_r^\tau = \ddot{S} = -\dfrac{20\pi^2}{9}\sin\dfrac{\pi}{3}$, при $t_1 = 1\text{ с}$ $a_r^\tau = -19{,}0\ \text{см/с}^2$.

В связи с тем, что $a_r^\tau < 0$, вектор $\overline{a}_r^\tau$ направлен вдоль прямой *OM*, в сторону уменьшения *S*, а его модуль $a_r^\tau = 19{,}0\ \text{см/с}^2$.

Переносное движение вращательное, задано уравнением $\varphi = 4t - 3t^2$. Находим угловую скорость и угловое ускорение тела *D*: $\tilde{\omega}_e = \dot{\varphi} = 4 - 6t$, при $t_1 = 1\text{ с}$, $\tilde{\omega}_e = -2\ \text{с}^{-1}$; $\tilde{\varepsilon}_e = \ddot{\varphi} = -6\ \text{с}^{-2}$. Так как $\tilde{\omega}_e < 0$ и $\tilde{\varepsilon}_e < 0$, то направление вращения противоположно положительному направлению отсчета угла φ, вращение ускоренное. Модули $\omega_e = 2\ \text{с}^{-1}$, $\varepsilon_e = 6\ \text{с}^{-2}$. Направление вектора $\overline{\omega}_e$ показано на рис. 35.

Для определения переносной скорости и переносного ускорения точки находим сначала расстояние точки *M* от оси вращения $MK = OM\sin\alpha = 5\sqrt{3} = 8{,}7\ \text{см}$. Для $\overline{V}_r$ и $\overline{a}_e$ в момент времени $t_1 = 1\text{ с}$ получаем:

$$V_e = \omega_e \cdot MK = 10\sqrt{3} = 17{,}3\ \ \text{см/с},$$

$$\overline{a}_e = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau,$$

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot MK = 20\sqrt{3} = 34{,}6\ \text{см/с}^2,$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot MK = 30\sqrt{3} = 52 \text{ см/с}^2.$$

Через точку M проводим пространственные оси x, y, z и в соответствии с направлениями угловой скорости и углового ускорения направляем векторы $\overline{V}_e$, $\overline{a}_e^\tau$, $\overline{a}_e^n$.

Ускорение Кориолиса. Так как угол между вектором $\overline{V}_r$, $\overline{\omega}_e$ равен $(180^\circ - \alpha)$, то модуль $\overline{a}_c$ в момент $t_1 = 1$ с будет

$$a_c = 2\omega_e \cdot V_r \sin(180 - \alpha) = 2\omega_e V_r \sin\alpha = \frac{20\pi}{3} = 20{,}9 \text{ см/с}^2.$$

Воспользовавшись правилом Жуковского, направляем вектор $\overline{a}_c$ вдоль оси x от нас.

Абсолютное движение. В соответствии с теоремами сложения скоростей и ускорений имеем:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e, \quad \overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n + \overline{a}_c. \quad (95)$$

Так как векторы $\overline{V}_r$ и $\overline{V}_e$ взаимно перпендикулярны, то момент $t_1 = 1$с:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{10{,}5^2 + 17{,}3^2} = 20{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Для вычисления a_a спроецируем данные уравнения (95) на координатные оси x, y, z. Для момента $t_1 = 1$ с получаем:

$$a_{ax} = a_{rx}^\tau + a_{ex}^n + a_{ex}^\tau + a_{cx} = -a_e^\tau - a_c = -72{,}9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{ay} = a_{ry}^\tau + a_{ey}^n + a_{ey}^\tau + a_{cy} = -a_r^\tau \cos\alpha = -16{,}4 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{az} = a_{rz}^\tau + a_{ez}^n + a_{ez}^\tau + a_{cz} = -a_r^\tau \sin\alpha - a_e^n = -44{,}1 \text{ см/с}^2.$$

Находим значение a_a в момент $t_1 = 1$с:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = 86{,}8 \text{ см/с}^2.$$

Пример 2. По окружности радиусом R=60 см движется точка M по закону $S = AM = \dfrac{\pi}{3} R\left(3t^2 - t\right)$, ($S$ измеряется в м, t – в с).

Пластина вращается вокруг неподвижной оси O перпендикулярной плоскости пластины, по закону $\varphi = \left(2t^3 - 11t\right)$ рад (рис. 36).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент $t_1 = 1$ с.

Решение

Рассматриваем движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге ADM относительным, а вращение пластины переносным движением.

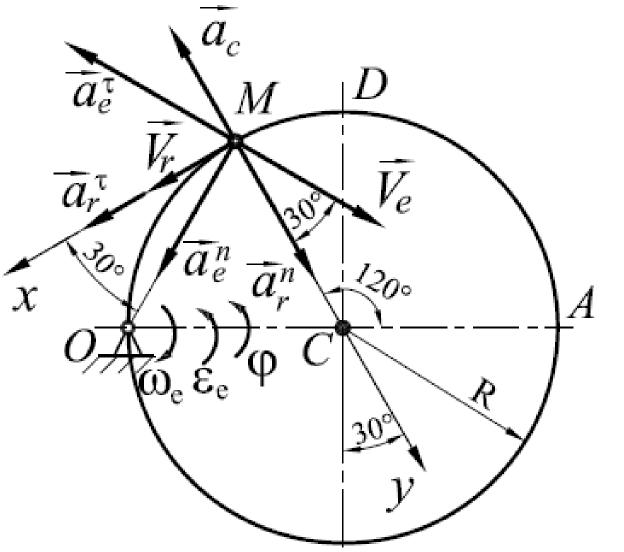


Рис. 36

Находим положение точки M в момент $t_1 = 1$ с:

$$S_1 = \frac{\pi}{3} R(3 \cdot 1 - 1) = \frac{2\pi}{3} R,$$

$$\angle ACM = \frac{S_1}{R} = \frac{2}{3}\pi = 120^\circ.$$

Изображаем точку M в этом положении. Определяем все кинематические характеристики относительного и переносного движений.

Относительное движение. По известному уравнению относительного движения находим относительную скорость:

$$\tilde{V}_r = \dot{S} = \frac{\pi}{3} R(6t - 1),$$

при $t_1 = 1$ с $\qquad \tilde{V}_r = 3{,}14$ м/с.

Так как $\tilde{V}_r > 0$, то вектор $\overline{V}_r$ направлен по касательной к траектории (окружности) в сторону возрастания S, а модуль $V_r = 3{,}14$ м/с.

Находим относительное ускорение точки M:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau.$$

Относительно нормальное ускорение определяем по формуле:

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = \frac{V_r^2}{R},$$

при $t_1 = 1$ с, $a_r^n = 16{,}43$ м/с^2.

Относительное касательное ускорение находим:

$$\bar{a}_r^\tau = \ddot{S} = \frac{\pi}{3} R \cdot 6 = 3{,}77 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_r^\tau$ совпадает с направлением вектора $\bar{V}_r$. Направление векторов $\bar{a}_r^n$ и $\bar{a}_r^\tau$ показано на рис. 36.

Переносное движение. В связи с тем, что переносное движение вращательное, находим угловую скорость и угловое ускорение пластины:

$$\tilde{\omega}_e = \dot{\varphi} = 6t^2 - 11, \text{ при } t_1 = 1\text{с}, \quad \tilde{\omega}_e = -5\,\text{с}^{-1},$$

$$\bar{\varepsilon}_e = \ddot{\varphi} = 12t = 12 \text{ с}^{-2}, \ \varepsilon_e = 12 \text{ с}^{-2}.$$

Так как $\tilde{\omega}_e < 0$, то направление вращения противоположно положительному направлению отсчета угла φ, т.е. направлено по часовой стрелке, а вектор $\bar{\omega}_e$, перпендикулярен плоскости рисунка (рис. 36) и направлен от нас. В связи с тем, что $\tilde{\varepsilon}_e > 0$, вращение будет замедленным.

Для нахождения переносной скорости и переносного ускорения находим расстояние *OM*. Так как $\angle OCM = 60^\circ$, то треугольник *OMC* равносторонний, поэтому *OM*=*R*=60 см.

Находим $\bar{V}_e$ и $\bar{a}_e^\tau$ в момент $t_1 = 1$с: $V_e = \omega_e \cdot OM = 3$ м/с, $\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau$, $a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM = 15$ м/с^2, $a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM = 7{,}2$ м/с^2.

Векторы $\bar{V}_e$, и $\bar{a}_e^\tau$ направляются в соответствии с направлениями угловой скорости и углового ускорения, а $\bar{a}_e^n$ направляется от точки *M* к *O*.

Ускорение Кориолиса. Угол между векторами $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$ равен 90°:

$$a_c = 2\omega_e \cdot V_r = 31 \text{ м/с}^2.$$

Направляем вектор $\bar{a}_c$, используя правило Жуковского.

Абсолютное движение. Используя теоремы о сложении скоростей и ускорений, находим абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент $t_1 = 1$ с:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e,$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_c.$$

Проводим координатные оси *x* и *y* и векторные выражения для скорости и ускорения проецируем на эти оси:

$$\bar{V}_{ax} = \bar{V}_{rx} + \bar{V}_{ex} = V_r - V_e \cdot \cos 60^\circ = 4{,}64 \text{ м/с};$$

$$\bar{V}_{ay} = \bar{V}_{ry} + \bar{V}_{ey} = V_r \cdot \cos 30^\circ = 2{,}61 \text{ м/с};$$

$$\bar{a}_{ax} = \bar{a}_{rx}^n + \bar{a}_{rx}^\tau + \bar{a}_{ex}^n + \bar{a}_{ex}^\tau + \bar{a}_{cx} =$$

$$= a_r^\tau + a_e^n \cdot \cos 30^\circ + a_e^\tau \cdot \cos 60^\circ = 20{,}36 \text{ м/с}^2;$$

$$\bar{a}_{ay} = \bar{a}_{ry}^n + \bar{a}_{ry}^\tau + \bar{a}_{ey}^n + \bar{a}_{ey}^\tau + \bar{a}_{cy} =$$

$$= a_r^n + a_e^n \cdot \cos 60^\circ + a_e^\tau \cdot \cos 30^\circ = 13{,}31 \text{ м/с}^2.$$

По известным проекциям находим абсолютную скорость V_a и абсолютное ускорение a_a:

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2} = 5{,}32 \text{ м/с}, \qquad a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = 24{,}32 \text{ м/с}^2.$$

Задачи для самоконтроля

Задача 3.1

Кривошип *OA*=0,2 м вращается вокруг оси *O* с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с и приводит в движение кулису *1*, движущуюся поступательно (рис. 37). Найти скорость кулисы, если угол $\alpha = 30^\circ$.

Задача 3.2

По грани призмы, движущейся со скоростью $\overline{V}_e$, скользит конец стержня *AB* (рис. 38). При каком угле α в градусах абсолютная скорость точки *A* будет равна скорости призмы $\overline{V}_e$?

Задача 3.3

Точка *M* движется по ободу диска, радиус которого *R*=0,06 м, со скоростью $V_r = 0{,}04$ м/с (рис. 39). Определить абсолютную скорость точки *M* в указанном положении, если закон вращения диска $\varphi = t$.

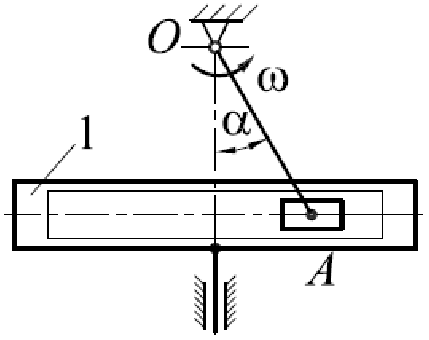


Рис. 37

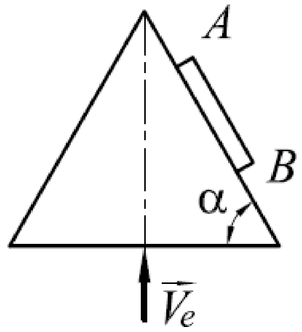


Рис. 38

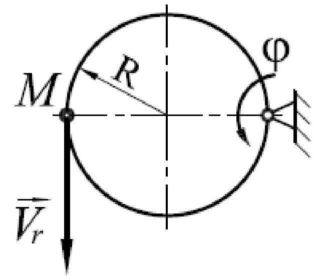


Рис. 39

Задача 3.4

Пластина *ABCD* вращается вокруг оси *Oz* с угловой скоростью $\omega = 4t$. По ее стороне *BC* в направлении от *B* к *C* движется точка *M* с постоянной скоростью 9 м/с (рис. 40). Определить модуль абсолютной скорости точки *M* в момент времени *t*=3 с, если длина *AB*=1 м.

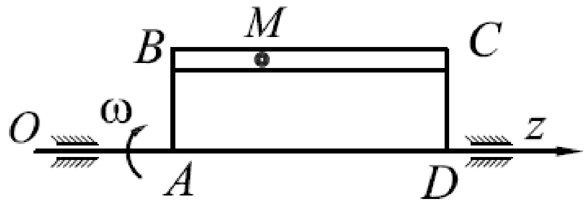


Рис. 40

Задача 3.5

По горизонтальной плоскости движется кулачок *1* с ускорением $a_1 = 0{,}6$ м/с^2 (рис. 41). Определить ускорение толкателя *2*, если угол $\alpha = 30^\circ$.

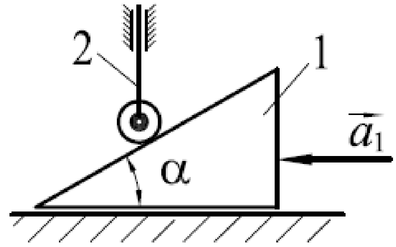


Рис. 41

Задача 3.6

По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны AB с угловой скоростью $\omega = 8$ рад/с, движется точка M с относительной скоростью $V_r = 4$ м/с (рис. 42). Определить модуль ускорения Кориолиса точки M.

Задача 3.7

Трубка вращается вокруг оси OO_1 с угловой скоростью $\omega = 1{,}5$ рад/с. Шарик M движется вдоль трубки по закону $M_O M = 4t$ (рис. 43). Найти модуль ускорения Кориолиса шарика.

Задача 3.8

Точка M движется с постоянной скоростью V=2 м/с по кольцу r=0,5 м, которое вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с. (рис. 44). Определить модуль абсолютного ускорения точки M в указанном положении.

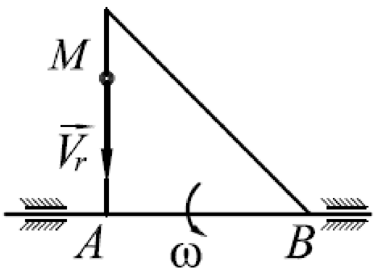


Рис. 42

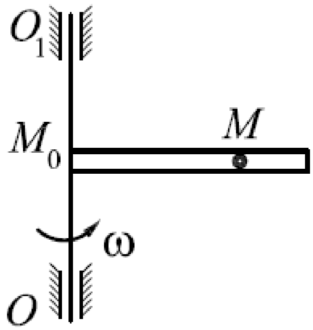


Рис. 43

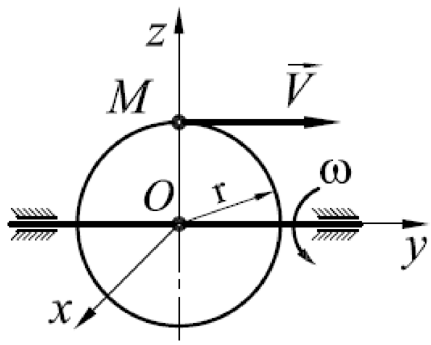


Рис. 44

Задача 3.9

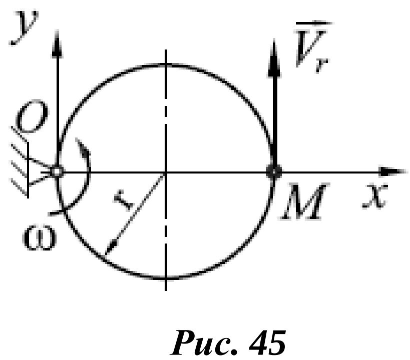


Рис. 45

Кольцо радиусом r=0,5 м вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с в плоскости чертежа (рис. 45). По кольцу перемещается точка M с постоянной скоростью V=2 м/с. Определить модуль абсолютного ускорения точки M в указанном положении.

Задача 3.10

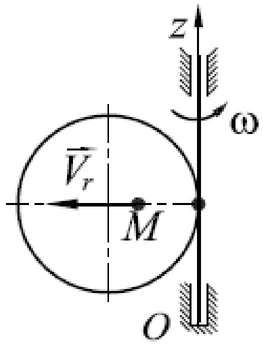


Рис. 46

По диаметру диска радиусом r=0,5 м, вращающегося вокруг оси Oz, движется точка M с относительной скоростью $V_r = 4t^3$ (рис. 46). Определить модуль относительного ускорения точки M в момент времени t=1 с.

4. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Уравнения плоского движения. Разложение плоского движения на два движения

Плоским или *плоскопараллельным* движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных данной неподвижной плоскости. Примерами такого движения могут служить: движение конуса, основание которого скользит по данной неподвижной плоскости; качение колеса по прямолинейному рельсу; движение шатуна кривошипно-ползунного механизма.

Пересечем движущееся тело плоскостью *II*, параллельной данной неподвижной плоскости *I* (рис. 47). В сечении получим некоторую плоскую фигуру *S*. Из определения плоского движения следует, что при таком движении тела фигура *S*, перемещаясь вместе с телом, все время остается в плоскости *II (Oxy)*.

Возьмем в теле какой-нибудь отрезок A_1A_2, перпендикулярный плоскости сечения *S*. Так как фигура *S* во все время движения остается в плоскости *II*, то отрезок A_1A_2 остается перпендикулярным к этой плоскости и, следовательно, перемешается параллельно самому себе. Но в таком случае, все точки данного тела, лежащие на прямой A_1A_2, движутся одинаково с точкой *A* фигуры *S*.

Точно так же все точки, лежащие на прямой B_1B_2, движутся одинаково с точкой *B* фигуры *S*. Отсюда следует, что изучение плоского движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры (сечения *S)* в плоскости *II* или *Oxy* (рис. 48).

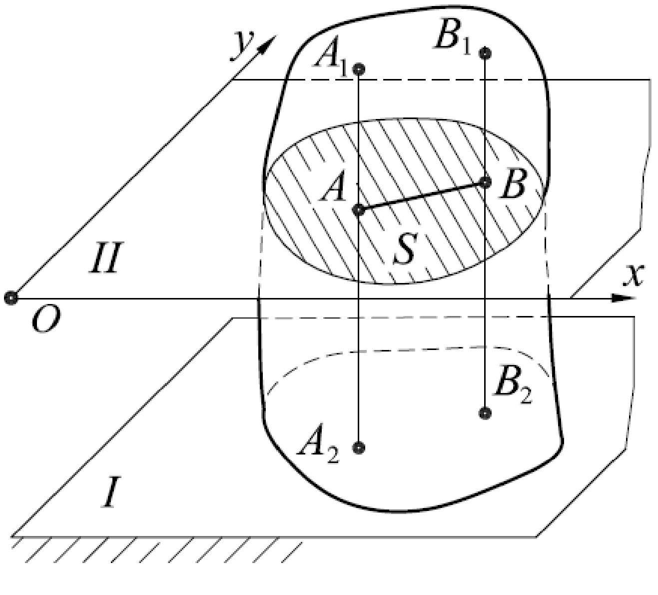


Рис. 47

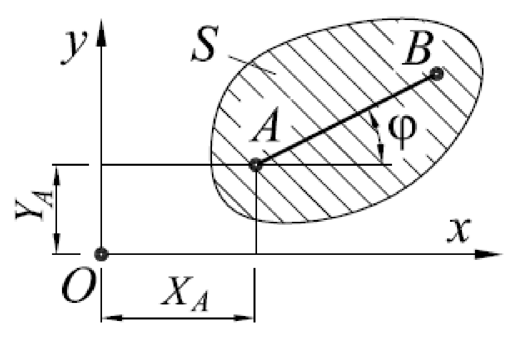


Рис. 48

Положение сечения S в плоскости Oxy будет определено, если известно положение двух ее точек или прямой, проходящей через эти точки.

Положение отрезка AB можно определить зная координаты точки A: x_A, y_A, и угол φ между AB и осью x, который будем отсчитывать против хода часовой стрелки. При движении плоской фигуры координаты x_A, y_A и угол φ, изменяясь с течением времени, являются некоторыми однозначными и непрерывными функциями t, т.е.

$$x_A = f_1(t),\ y_A = f_2(t),\ \varphi = f_3(t). \tag{96}$$

Если функции $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ известны, то для каждого момента t можно из уравнений (96) найти соответствующие значения x_A, y_A, φ и, следовательно, определить положение сечения S, а значит, и тела в этот момент. Поэтому уравнения (96) называются *уравнениями плоского движения* твердого тела. Точку A часто называют полюсом.

Покажем, что плоское движение тела можно разложить на два движения: поступательное, вместе с полюсом и вращательное вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через полюс (впредь будем говорить – вращательное вокруг полюса).

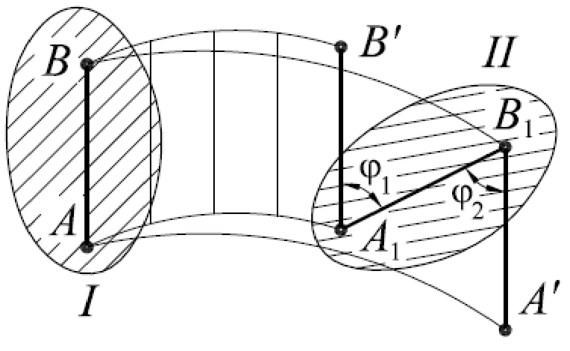


Рис. 49

Рассмотрим два положения сечения S (рис. 49). Покажем, что перевести тело из положения I в положение II можно, перемещая его поступательно вместе с полюсом и поворачивая вокруг полюса.

Возьмем за полюс точку A и переместим тело поступательно так, чтобы точка A совпадала с A_1, тело займет положение A_1B'. Повернем тело вокруг полюса A_1 на угол φ_1 до совмещения точки B' с B_1, тело займет положение II.

Аналогично, взяв за полюс точку B, перемещаем тело поступательно до совмещения B с B_1 (положение B_1A') и поворачиваем вокруг полюса B_1 на угол φ_2 до совмещения точки A' с A_1 (положение II). Итак, плоское движение твердого тела слагается из поступательного движения вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса.

Замечание: поступательное движение зависит от выбора полюса, а вращательное движение не зависит от полюса (угол φ_1 равен φ_2, и направления поворота одинаковы).

Основными кинематическими характеристиками плоского движения являются скорость и ускорение поступательного движения вместе с полюсом, а так же угловая скорость и угловое ускорение во вращательном движении вокруг полюса. Их можно найти из уравнений (96). Так как вращательное движение не зависит от выбора полюса, то и угловая скорость и угловое ускорение не зависят от выбора полюса. Однако следует иметь в виду, что ось вращения подвижна.

4.2. Скорости точек тела при плоском движении

Теорема. При плоском движении твердого тела скорость любой его точки равна векторной сумме скорости полюса и скорости точки от вращательного движения вокруг полюса.

Доказательство

Пусть полюс A движется со скоростью $\overline{V}_A$, а плоская фигура S вращается с угловой скоростью ω вокруг полюса A (рис. 50). С полюсом A свяжем координатные оси Ax_1y_1, движущиеся поступательно по отношению к осям Oxy.

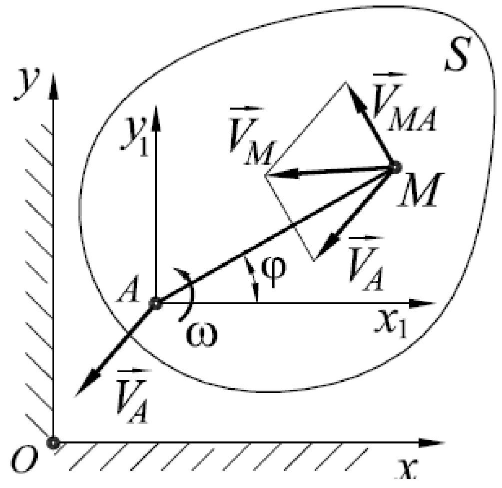


Рис. 50

Скорость точки M можно найти как скорость при сложном движении. Так как переносным здесь является поступательное движение вместе с полюсом A, то переносные скорости всех точек плоской фигуры будут одинаковыми, равными скорости полюса, т.е. $\overline{V}_e = \overline{V}_A$.

Относительным движением является вращательное движение вокруг полюса, поэтому $\overline{V}_r = \overline{V}_{MA}$.

По теореме сложения скоростей получим:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_e + \overline{V}_r, \qquad \overline{V}_M = \overline{V}_A + \overline{V}_{MA}, \tag{97}$$

т.е. теорема доказана.

Используя результаты, полученные в п. 2.3, имеем:

$$V_{MA} = \omega \cdot AM\ , \tag{98}$$

вектор V_{MA} перпендикулярен отрезку AM.

Если известны $\overline{V}_A$, $\overline{V}_M$ и AM, то можно найти угловую скорость тела в данный момент времени:

$$\omega = \frac{\left|\overline{V}_M - \overline{V}_A\right|}{AM}. \tag{99}$$

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Теорема. Проекции скоростей двух точек фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой (рис. 51).

Доказательство

На основании предыдущей теоремы (о скорости любой точки плоской фигуры): $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$, причем вектор $\overline{V}_{BA}$ по модулю равен $\omega \cdot AB$, а направлен перпендикулярно к AB. Проведем через точки A и B ось x и спроецируем это выражение на ось. Получим $V_{Bx} = V_{Ax} + V_{BAx}$, но $V_{BAx} = 0$ и $V_{Bx} = V_{Ax}$

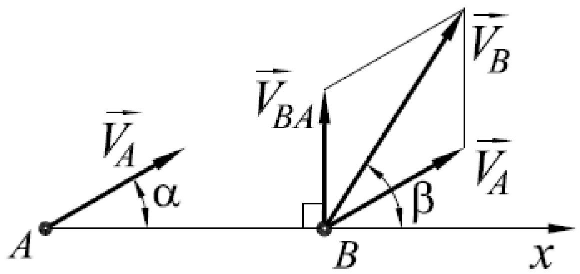


Рис. 51

или $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$, (100)

что и требовалось доказать.

Примечание. Эта теорема справедлива при любом движении твердого тела и называется основной теоремой кинематики твердого тела.

4.3. Мгновенный центр скоростей. Нахождение скоростей точек с помощью мгновенного центра скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры или неизменно связанная с ней точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Докажем, что при непоступательном движении плоской фигуры такая точка существует.

Пусть задана скорость точки A и мгновенная угловая скорость ω вращения плоской фигуры (рис. 52). Отложим отрезок AP, перпендикулярный к $\overline{V}_A$, в направлении вращения и равный:

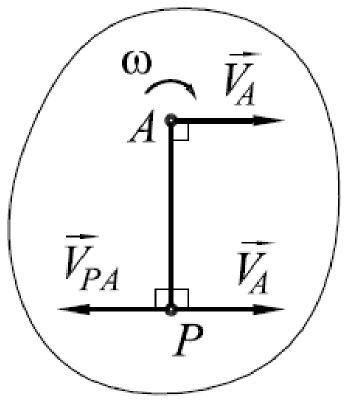


Рис. 52

$$AP = \frac{V_A}{\omega}. \qquad (101)$$

Найдем скорость точки P. На основании теоремы о скоростях точек при плоском движении имеем $\overline{V}_P = \overline{V}_A + \overline{V}_{PA}$, причем $V_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \cdot \dfrac{V_A}{\omega} = V_A$. Так как вектор $\overline{V}_{PA}$ направлен противоположно $\overline{V}_A$, то $\overline{V}_{PA} = -\overline{V}_A$ и $\overline{V}_P = 0$, т.е. точка P является МЦС.

Если известен в данный момент времени МЦС – точка P, то приняв его за полюс, можно записать:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_P + \overline{V}_{AP} = \overline{V}_{AP}, \qquad (102)$$

так как $\overline{V}_P = 0$.

Аналогично, $\overline{V}_B = \overline{V}_{BP}\, \overline{v}_B = \overline{v}_{BP}$, т.е. распределение скоростей в движущейся плоской фигуре в данный момент такое же, как и при вращении вокруг точки P. Таким образом, скорости точек можно рассматривать как скорости в их вращательном движении вокруг мгновенного центра скоростей (оси, проведенной через точку P, перпендикулярно плоскости движения).

Важно отметить, что положение мгновенного центра скоростей на плоскости движущейся фигуры не остается неизменным: различным моментам времени соответствуют различные точки, являющиеся мгновенными центрами скоростей.

Так как $V_{AP} = \omega \cdot AP$, $\quad V_{BP} = \omega \cdot BP$, то:

$$V_A = \omega \cdot AP, \qquad V_B = \omega \cdot BP, \qquad (103)$$

причем вектор $\bar{V}_A$ перпендикулярен AP, вектор $\bar{V}_B$ перпендикулярен BP. Из (103) следует, что

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}, \tag{104}$$

т.е. величины скоростей двух точек тела при плоском движении относятся между собой как их расстояния от МЦС.

Если известны скорости точек и их расстояния до МЦС, то можно найти мгновенную угловую скорость тела:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \tag{105}$$

Частные случаи нахождения мгновенного центра скоростей

Из п. 4.2. видно, что для определения скоростей точек твердого тела важно уметь правильно находить МЦС. Рассмотрим различные частные случаи нахождения МЦС.

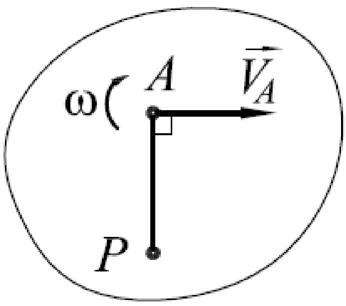


Рис. 53

1. Известны скорость одной из точек фигуры $\bar{V}_A$ и угловая скорость в данный момент времени ω (рис. 53). МЦС находится на перпендикуляре, восстановленном к вектору скорости $\bar{V}_A$ на расстоянии

$$AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

Направление перпендикуляра находим, поворачивая вектор $\bar{V}_A$ на 90° в сторону вращения.

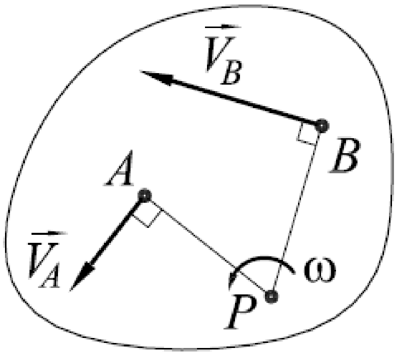


Рис. 54

2. Известны направления скоростей двух точек плоской фигуры и модуль одной из них (рис. 54). Так как МЦС лежит на перпендикулярах к направлению скоростей, то, следовательно, он находится в точке пересечения этих перпенди-куляров.

Зная расстояние AP к V_A, можно найти мгновенную угловую скорость ω и скорость точки B:

$$\omega = \frac{V_A}{AP}, \qquad V_B = \omega \cdot BP = \frac{V_A \cdot BP}{AP}.$$

Направление ω определяется по направлению $\overline{V}_A$ относительно точки P, а направление $\overline{V}_A$, – по направлению ω.

3. Скорости двух точек плоской фигуры перпендикулярны к соединяющему их отрезку, направлены в одну сторону и по модулю не равны (рис. 55). МЦС находится в точке пересечения указанного отрезка с прямой, соединяющей концы векторов скоростей двух точек. Действительно, из подобия треугольников имеем $\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}$, что справедливо, если точка P – МЦС.

4. Скорости двух точек перпендикулярны к соединяющему их отрезку и направлены в разные стороны (рис. 56).

МЦС находится в точке пересечения указанного отрезка с прямой, соединяющей концы векторов скоростей двух точек. Доказательство, аналогичное приведенному в п. 3.

5. Скорости двух точек параллельны и не перпендикулярны отрезку, их соединяющему (рис. 57).

Из теоремы о проекциях скоростей двух точек на прямую, соединяющую их, имеем, что $V_A = V_B$. Движение мгновенно поступательное, МЦС находится в бесконечности и $\omega = 0$. Такой же результат получается и в п. 3, если скорости точек A и B равны по модулю.

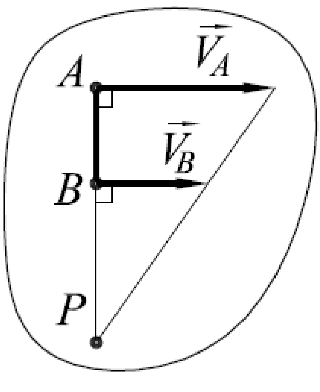


Рис. 55

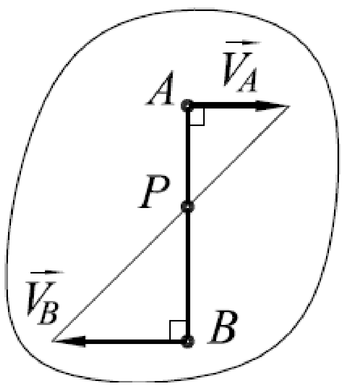


Рис. 56

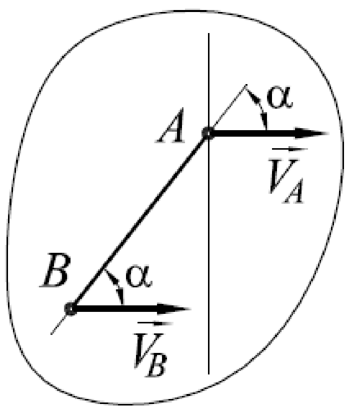


Рис. 57

6. Плоская фигура катится без проскальзывания по неподвижной поверхности (рис. 58).

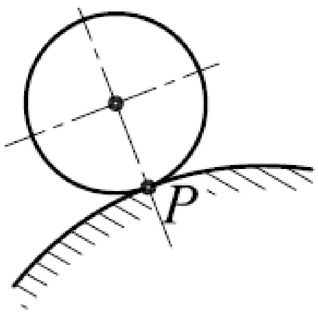


Рис. 58

МЦС находится в точке соприкасания тела с поверхностью.

Действительно, эта точка должна иметь одинаковую скорость для поверхности и фигуры, но скорость любой точки поверхности равна нулю.

4.4. Ускорение точек тела при плоском движении

Теорема. Ускорение любой точки тела при плоском движении равно векторной сумме ускорения полюса и ускорения этой точки от вращательного движения фигуры вокруг полюса.

Доказательство

Пусть полюс A имеет ускорение $\overline{a}_A$, а плоская фигура S вращается с мгновенной угловой скоростью ω и мгновенным угловым ускорением ε вокруг полюса A (рис. 59). С полюсом A свяжем координатные оси Ax_1y_1, движущиеся поступательно по отношению к осям Oxy. Ускорение точки M можно найти как ускорение точки при сложном движении. Так как переносным здесь является поступательное движение вместе с полюсом A, то переносные ускорения всех точек плоской фигуры будут одинаковыми, равными ускорению полюса, т.е. $\overline{a}_{Me} = \overline{a}_A$.

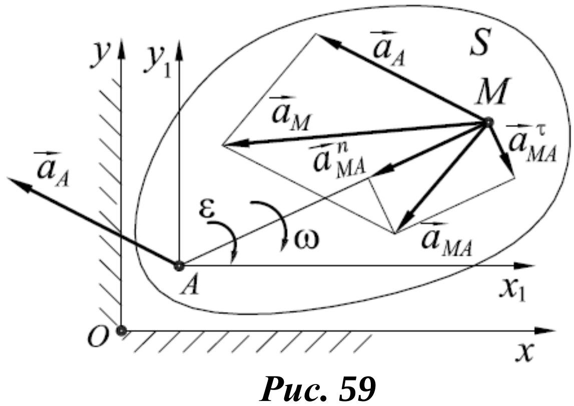


Рис. 59

Относительным движением является вращательное движение вокруг полюса A.

Применяя теорему сложения ускорений при переносном поступательном движении, получаем $\overline{a}_M = \overline{a}_{Me} + \overline{a}_{Mr}$, но $\overline{a}_M = \overline{a}_{MA}$, поэтому

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}, \qquad (106)$$

что и требовалось доказать.

Используя результаты п. 2.2, имеем $\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau$ и

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau, \tag{107}$$

где $\bar{a}_{MA}^n$ – нормальное ускорение точки *M* во вращательном движении вокруг полюса *A*, $a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM$, вектор $\bar{a}_{MA}^n$ всегда направлен от точки *M* к полюсу *A*;

$\bar{a}_{MA}^\tau$ – касательное ускорение точки *M* во вращательном движении вокруг полюса *A*, $\bar{a}_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM$, вектор $\bar{a}_{MA}^\tau$ направлен перпендикулярно к *MA* в зависимости от направления ε (рис. 59).

4.5. Примеры решения задач

Из задач, решаемых по этой теме, следует обратить внимание на расчет плоских многозвенных механизмов.

Механизм, движение которого исследуется, надо изобразить на рисунке в том положении, для которого требуется определить соответствующие характеристики. Расчет начинают с того звена, движение которого задано и, переходя от одного звена к другому, определяют скорости и ускорения точек, являющихся общими для этих двух звеньев. МЦС нужно находить только для каждого звена в отдельности; то же относится к угловым скоростям и ускорениям.

Не следует думать, что если найдено значение скорости точки, то эта скорость постоянна. Это значение относится только к данному моменту времени (мгновенно). Отсюда не следует, что ускорение равно нулю.

При нахождении ускорения пользуются формулой (107), если же ускорение точки *A* состоит из $\bar{a}_A^\tau$ и $\bar{a}_A^n$, то формула запишется в виде:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau. \tag{108}$$

Часто при нахождении $\bar{a}_M$ пользуются методом проекций.

Пример 1. Кривошип O_1O вращается вокруг оси O_1 и имеет в данный момент угловую скорость ω и угловое ускорение ε (рис. 60, *а*). На палец *O* этого кривошипа свободно насажено колесо *1* радиусом *r*, которое катится без скольжения по неподвижному колесу радиусом $R = l - r$. Найти в данный момент угловую скорость ω и угловое ускорение ε_1 колеса *1*, скорости и ускорения точек A и B – V_A, V_B, a_A, a_B.

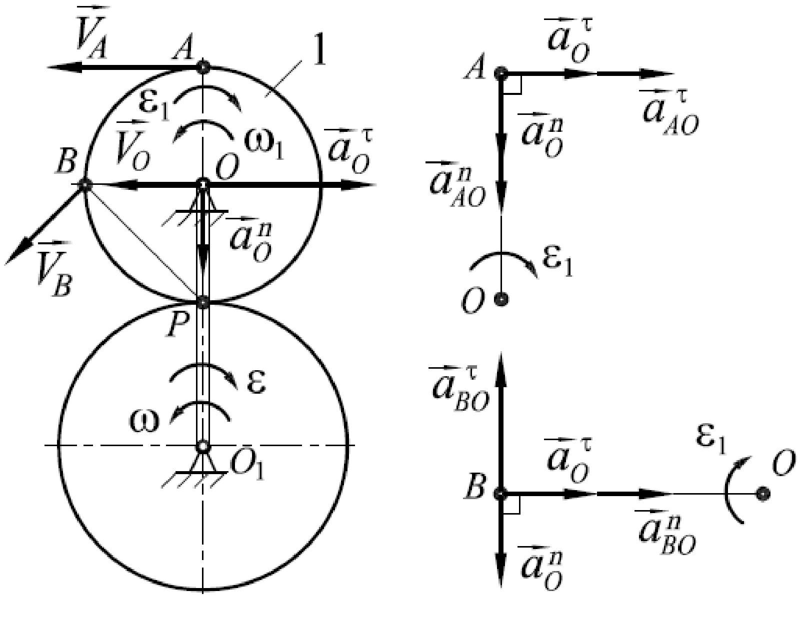


Рис. 60

Решение

1. Для решения задачи надо рассмотреть движение колеса *1*. По данным задачи легко найти скорость $\overline{V}_0$, и ускорение $\overline{a}_0$ точки O этого колеса, которую примем за полюс.

2. Определение $\overline{V}_0$ и $\overline{a}_0$. Зная ω и ε кривошипа, находим

$$V_0 = \omega \cdot O_1O = \omega \cdot l\,,$$

$$\overline{a}_0 = \overline{a}_0^n + \overline{a}_0^\tau\,,$$

$$a_0^\tau = \varepsilon \cdot O_1O = \varepsilon \cdot l\,,$$

$$a_0^n = \omega^2 \cdot O_1O = \omega^2 \cdot l\,.$$

Направление векторов $\overline{V}_0$ и $\overline{a}_0^\tau$ определяют направление ω к ε, вектор $\overline{a}_0^n$ направлен от A к O.

3. Определение ω_1, V_A, V_B. Точка P зацепления колес является МЦС для шестерни *1*; следовательно, угловая скорость шестерни *1* равна:

$$\omega_1 = \frac{V_0}{OP} = \frac{V_A}{r} = \frac{\omega \cdot l}{r}\,,$$

а направление ω_1 определяется направлением $\overline{V}_0$.

Зная ω_1 и МЦС колеса *1*, находим скорости точек *A* и *B*:

$$V_A = \omega_1 \cdot AP = \omega_1 \cdot 2r = 2\omega \cdot l,$$

$$V_B = \omega_1 \cdot BP = \omega_1 \cdot r\sqrt{2} = \sqrt{2}\omega \cdot l.$$

Векторы $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$ направлены перпендикулярно к *AP* и *BP*, и их направление определяет направление ω_1. (Скорости точек *A* и *B* можно найти исходя из других соображений.)

4. Определение ε_1. Так как величина $OP=r$ остается постоянной при любом положении колеса *1*, то

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_0}{OP}\right) = \frac{1}{OP} \cdot \frac{dV_0}{dt} = \frac{a_0^\tau}{OP} = \frac{\varepsilon \cdot l}{r}.$$

В связи с тем, что $\overline{a}_0^\tau$ и $\overline{V}_0$ направлены в разные стороны, вращение колеса *1* замедленное и ε_1 направлено противоположно ω_1.

5. Определение ускорений точек *A* и *B*. Приняв точку *O* за полюс, имеем:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_O + \overline{a}_{AO} = \overline{a}_O^n + \overline{a}_O^\tau + \overline{a}_{AO}^n + \overline{a}_{AO}^\tau,$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_O + \overline{a}_{BO} = \overline{a}_O^n + \overline{a}_O^\tau + \overline{a}_{BO}^n + \overline{a}_{BO}^\tau.$$

Используя результаты п. 4.4, находим:

$$a_{AO}^n = \omega_1^2 \cdot AO = \omega_1^2 \cdot r = \frac{\omega^2 l^2}{r}, \qquad a_{AO}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AO = \varepsilon \cdot l,$$

$$a_{BO}^n = \omega_1^2 \cdot BO = \omega_1^2 \cdot r = \frac{\omega^2 l^2}{r}, \qquad a_{BO}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BO = \varepsilon \cdot l.$$

Векторы $\overline{a}_{AO}^n$ и $\overline{a}_{BO}^n$ направлены от данных точек к полюсу, а векторы $\overline{a}_{AO}^\tau$ и $\overline{a}_{BO}^\tau$ перпендикулярны им, и их направление определяет направление ε (рис. 60, *б*). Изображаем на рисунке все векторы, из которых слагаются ускорения точек *A* и *B*, и находим ускорения этих точек:

$$a_A = \sqrt{\left(a_O^\tau + a_{AO}^\tau\right)^2 + \left(a_O^n + a_{AO}^n\right)^2} = l\sqrt{4\varepsilon^2 + \omega^4\left(1 + \frac{l}{r}\right)^2},$$

$$a_B = \sqrt{\left(a_O^\tau + a_{BO}^n\right)^2 + \left(a_O^n - a_{BO}^\tau\right)^2} = l\sqrt{\left(\varepsilon + \frac{\omega^2 l}{r}\right)^2 + \left(\omega^2 - \varepsilon\right)^2}.$$

Величины ускорений точек *A* и *B* можно найти методом проекций.

Пример 2. Механизм состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами, точка *D* находится в середине стержня *2* (рис. 61).

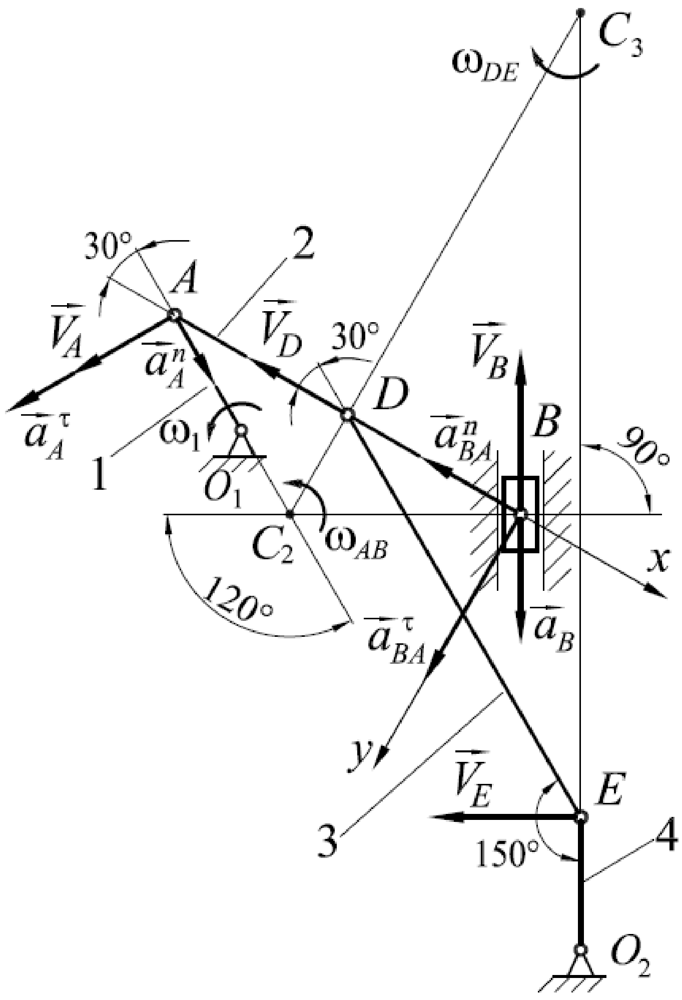


Рис. 61

Длины стержней равны соответственно: l_1=0,4 м, l_2=1,2 м, l_3=1,4 м, l_4=0,6 м. Для положения механизма, показанного на рис. 61, по известной угловой скорости $\omega_1 = 2\tilde{n}^{-1}$ и угловому ускорению $\varepsilon_1 = 4\tilde{n}^{-2}$ в данный момент времени найти скорости V_B и V_E точек *B* и *E*, угловую скорость ω_{AB} и угловое ускорение ε_{AB} звена *AB*, а также ускорение a_B точки *B*.

Решение

1. Определение скорости V_B. Точка *B* принадлежит звену *AB*. Поэтому предварительно находим скорость точки *A*: $V_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8$ м/с, $V_A \perp O_1A$, направление $\overline{V}_A$ определяет направление ω_1. Для определения V_B воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек стержня *AB* на прямую, соединяющую точки *A* и *B*. Скорость V_B направлена вдоль направляющих. Находим $V_A \cdot \cos 60^\circ$, откуда $V_B = V_A = 0{,}8$ м/с.

2. Определение ω_{AB}. Для этого находим МЦС – C_2 звена *AB*, восстанавливая из точек *A* и *B* перпендикуляры к $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$. Находим $AC_2 = AD / \cos 30^\circ = 0{,}69$ м и $\omega_{AB} = V_A / AC_2 = 1{,}16$ с$^{-1}$. Направление ω_{AB} определяется направлением $\overline{V}_A$.

3. Определение $\overline{V}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, для определения $\overline{V}_E$ надо предварительно найти $\overline{V}_D$. Так как точка D принадлежит также стержню AB, то

$$V_D = \omega_{AB} \cdot DC_2 = \omega_{AB} \cdot 0{,}5 \cdot O_1A = 0{,}4 \text{ м/с.}$$

Вектор $\overline{V}_D$ перпендикулярен отрезку C_2D и направлен в сторону поворота, т.е. ω_{AB}.

Точка E принадлежит также стержню O_2E, вращающемуся вокруг точки O_2, тогда $\overline{V}_E \perp O_2E$. Восстанавливая из точек D и E перпендикуляры к $\overline{V}_E$ и $\overline{V}_D$, находим МЦС C_3 звена DE. Так как $\angle DC_3E = \angle DEE_3 = 30^\circ$, то ΔDC_3E – равнобедренный. Составив пропорцию, находим, что

$$\frac{V_D}{V_E} = \frac{DC_3}{EC_3} = \frac{1}{2\cos 30^\circ}, \qquad V_E = V_D \cdot 2\cos 30^\circ = 6{,}93 \text{ м/с.}$$

По направлению $\overline{V}_D$ определяем направление поворота стержня $DE(\omega_{DE})$, вектор $\overline{V}_E$ будет направлен в сторону поворота этого стержня перпендикулярно к C_3E.

4. Определение $\overline{a}_B$. Точка B принадлежит стержню AB, поэтому найдем сначала ускорение точки A, а затем примем ее за полюс $\overline{a}_A = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau$, $\quad a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6$ м/с^2, $a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 1{,}6$ м/с^2.

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1, изображаем эти векторы на рис. 61.

Так как точка B принадлежит ползуну, то предполагаем, что вектор $\overline{a}_B$ направлен вниз. Для определения $\overline{a}_B$ воспользуемся равенством:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau. \tag{109}$$

Находим $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 l_2 = 1{,}61$ м/с^2. Вектор $\overline{a}_{BA}^n$, направлен от B к A. Вектор $\overline{a}_{BA}^\tau$ направлен перпендикулярно AB (в любую сторону). Изображаем на рисунке эти векторы.

Таким образом, у величин, входящих в равенство (109), неизвестны только численные величины $\overline{a}_B$ и $\overline{a}_{BA}^\tau$. Для нахождения $\overline{a}_B$ равенство (109) спроецируем на ось x, перпендикулярную $\overline{a}_{BA}^\tau$:

$$a_{BX} = a_{AX}^n + a_{AX}^\tau + a_{BAX}^n + a_{BAX}^\tau,$$

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^n \cos 30^\circ - a_A^\tau \cos 60^\circ - a_{BA}^n.$$

Отсюда, подставляя числовые значения всех величин, находим $a_B = -2{,}05$ м/с^2. Знак минус указывает, что вектор $\bar{a}_B$ направлен в сторону, противоположную указанной на рис. 61.

5. Определение ε_{AB}. Сначала определим a_{BA}^{τ}. Для этого равенство (109) спроецируем на ось y:

$$a_{BY} = a_{AY}^{n} + a_{AY}^{\tau} + a_{BAY}^{n} + a_{BAY}^{\tau},$$

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^n \cos 60^\circ + a_A^{\tau} \cos 30^\circ + a_{BA}^{\tau}.$$

Отсюда находим $a_{BA}^{\tau} = -3{,}96$ м/с^2. Знак указывает, что $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ направлен противоположно показанному на рис. 61.

Из равенства $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} l_3$ определяем $\varepsilon_{AB} = \dfrac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{l_3} = 3{,}3$ с$^{-2}$.

Так как $a_{BA}^{\tau} < 0$, то ε_{AB} направлено против часовой стрелки.

Пример 3. К кривошипу (рис. 62), равномерно вращающемуся вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_{OA} = 4\,\text{с}^{-1}$, прикреплен шатун AB с коромыслом BC. Даны размеры: $OA = r = 0{,}5$ м, $AB = 2r$, $BC = r\sqrt{2}$. В положении, изображенном на рис. 62, $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Определить для этого положения ускорение точки B шатуна, а также угловую скорость и угловое ускорение коромысла BC и шатуна AB.

Решение

1. Рассматривая движение шатуна AB, выберем за полюс точку A, принадлежащую одновременно и кривошипу OA, совершающему вращательное движение. Для точки A, так как ω_{OA} – const, получаем:

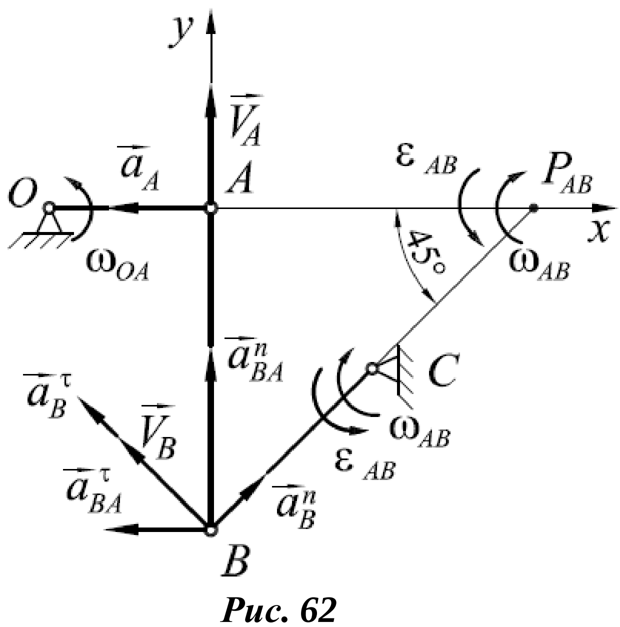


Рис. 62

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA} \cdot r = 2 \text{ м/с},$$
$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot r = 8 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{V}_A$ перпендикулярен OA, его направление определяет ω_{OA}, а вектор $\bar{a}_A$ направлен от A к O.

2. Определение ω_{AB}. В связи с тем, что точка B принадлежит еще и звену BC, вектор $\overline{V}_B$ перпендикулярен звену BC. Проводя перпендикуляры к $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$ получаем МЦС звена AB – P_{AB}. Из $\Delta AP_{AB}B$ следует, что $AP_{AB} = AB = 2r$, а поэтому $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AP_{AB}} = 2\ \text{c}^{-1}$.

Направление поворота показано на рис. 62.

3. Анализ векторных выражений для ускорения точки B. По теореме из п. 4.4:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau. \tag{110}$$

В этом выражении направление и величина $\overline{a}_B$ неизвестны. Кроме того, неизвестна величина a_{BA}^τ, так как для определения ε_{AB} нельзя воспользоваться приемом, примененным в примере 1 (расстояние до МЦС от точки A непостоянное). Но точка B принадлежит звену BC, а поэтому

$$\overline{a}_B = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau. \tag{111}$$

В выражении (111) найти a_B^n легко, но нельзя найти величину a_B^τ, так как нельзя заранее найти ε_{AB}.

Приравнивая правые части формул (110) и (111), имеем:

$$\overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau. \tag{112}$$

В векторном выражении (112) будут неизвестными только численные значения величин a_B^τ и a_{BA}^τ (вектор $\overline{a}_B^\tau$ направляем в произвольную сторону перпендикулярно BC, а $\overline{a}_{BA}^\tau$ – перпендикулярно AB). В проекциях на оси равенство (112) дает два скалярных уравнения, из которых эти неизвестные и определяются.

Предварительно найдем $\overline{a}_{BA}^n$ и $\overline{a}_B^n$.

4. Определение $\overline{a}_{BA}^n$. Зная ω_{AB}, находим $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 4$ м/с^2. Вектор $\overline{a}_{BA}^n$, направлен от B к A.

5. Определение $\overline{a}_B^n$. Сначала найдем скорость точки B. Используя теорему о проекциях скоростей двух точек A и B на прямую AB, имеем $V_B \cos 45^\circ = V_A$, откуда $V_B = V_A \cdot \sqrt{2}$. Тогда $a_B^n = \dfrac{V_B^2}{BC} = 8\sqrt{2}$ м/с^2.

6. Определение $\bar{a}_B^\tau$ и $\bar{a}_B$. Для определения a_B^τ спроецируем обе части равенства (112) на ось x, перпендикулярную к вектору $\bar{a}_{BA}^\tau$.

Получим:

$$\bar{a}_{BX}^n + \bar{a}_{BX}^\tau = a_{AX} + a_{BAX}^n + a_{BAX}^\tau ,$$

$$a_{BAX}^\tau \cos 45^\circ + a_B^n \cos 45^\circ = a_{BA}^n .$$

Подставляя численные значения величин, получаем $a_B^\tau = -4\sqrt{2}$ м/с^2.

Знак минус показывает, что вектор $\bar{a}_B^\tau$ имеет направление, противоположное $\bar{V}_B$ (вращение CB замедленное).

Зная $\bar{a}_B^n$ и $\bar{a}_B^\tau$, находим $\bar{a}_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^r)^2} = 4\sqrt{10} = 12{,}65$ м/с^2.

7. Определение ω_{BC} и ε_{BC}. По известным V_B и a_B^τ определяем:

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = 4 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon_{BC} = \frac{\left|a_B^\tau\right|}{BC} = 8 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ω_{BC} определяет направление $\bar{V}_B$, а ε_{BC} – истинное направление $\bar{a}_B^\tau$. Указываем ω_{BC} и ε_{BC} на рис. 62.

8. Определение ε_{BC}. Сначала вычислим a_{BA}^τ, для чего спроецируем обе части равенства (112) на ось y, перпендикулярную к $\bar{a}_B^\tau$. Получим:

$$a_{BY}^n + a_{BY}^\tau = a_{AY}^n + a_{BAY}^n + a_{BAY}^\tau ,$$

$$a_B^n = -a_A \cos 45^\circ - a_{BA}^\tau \cos 45^\circ + a_{BA}^n \cos 45^\circ .$$

Отсюда $a_{BA}^\tau = -20$ м/с^2, $\varepsilon_{AB} = \dfrac{\left|a_{BA}^\tau\right|}{AB} = 20$ с$^{-2}$.

Знак минус говорит, что истинное направление $\bar{a}_{BA}^\tau$ противоположно указанному на рис. 62. В соответствии с истинным направлением $\bar{a}_{BA}^\tau$ указываем направление ε_{AB} на рис. 62.

Задачи для самоконтроля

Задача 4.1

Скорость груза *1* $V = 0{,}5$ м/с (рис. 63). Определить угловую скорость подвижного блока *2*, если его радиус R=0,l м.

Задача 4.2

Стержень AB длиной 80 см движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки A и B стержня имеют скорости V_A=0,2 м/с, V_B=0,6 м/с (рис. 64). Определить угловую скорость стержня.

Задача 4.3

Для заданного положения шарнирного четырехзвенника (рис. 65). Определить скорость точки B, если точка A имеет скорость 1 м/с.

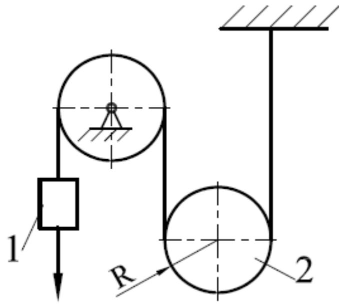


Рис. 63

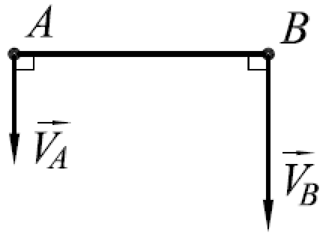


Рис. 64

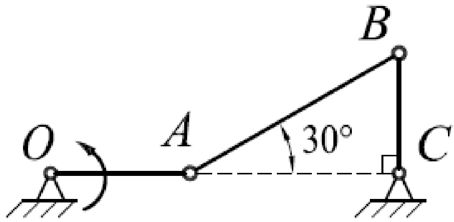


Рис. 65

Задача 4.4

Скорость точки A плоской фигуры ABC (рис. 66) V_A=2 м/с, угловая скорость фигуры $\omega = 2$ рад/с, расстояние AB=1,5 м. Определить скорость точки B.

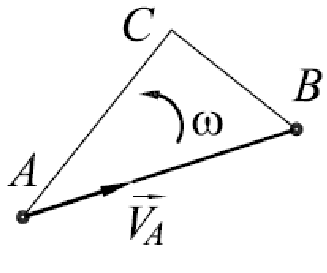


Рис. 66

Задача 4.5

Кривошип OA механизма, вращаясь равномерно, образует в данный момент времени с направлением OB угол $\varphi = 90^\circ$ (рис. 67). Определить расстояние от мгновенного центра скоростей шатуна AB до ползуна B.

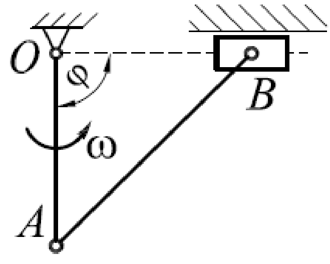


Рис. 67

Задача 4.6

Определить скорость точки *B* колеса (рис. 68), если точка *A* колеса имеет скорость 2 м/с.

Задача 4.7

Определить угловую скорость шатуна *AB* кривошипно-ползунного механизма в указанном положении (рис. 69), если точка *A* имеет скорость $V_A = 3$ м/с, а длина шатуна *AB*=3 м.

Задача 4.8

Колесо катится без скольжения (рис. 70). Определить ускорение точки B колеса в тот момент, когда скорость точки *A* равна нулю, а ускорение $a_A = 2$ м/с^2.

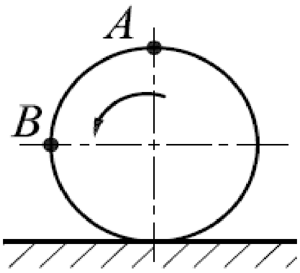


Рис. 68

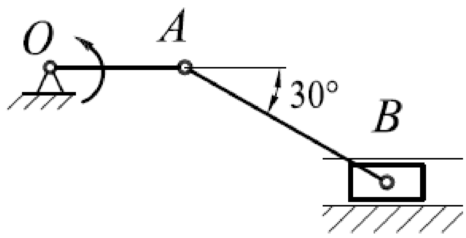


Рис. 69

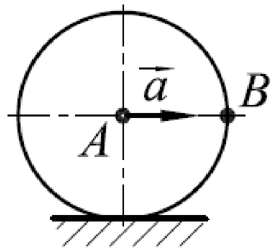


Рис. 70

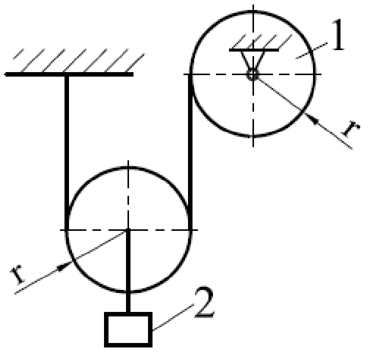


Рис. 71

Задача 4.9

Барабан *1* вращается по закону $\varphi = 0{,}1t^2$ (рис. 71). Определить ускорение груза *2*, если радиус *r*=0,2 м.

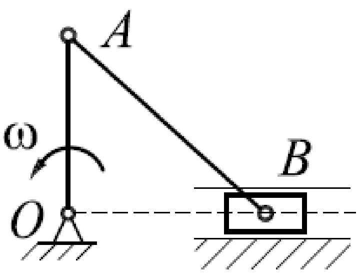


Рис. 72

Задача 4.10

Определить ускорение ползуна *B* кривошипно–ползунного механизма в данном положении (рис. 72), если угловая скорость кривошипа $\omega = 1\text{рад/с} = \text{const}$; длины звеньев *OA*=0,3 м; *AB*=0,5 м.

5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ранее были рассмотрены простейшие движения твердого тела – поступательное и вращательное вокруг неподвижной оси. Однако движение твердого тела, как и движение точки, может быть сложным.

Пусть тело совершает некоторое движение относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, которая, в свою очередь, движется относительно неподвижных осей $Oxyz$. *Относительным* движением тела называют его движение по отношению к подвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$. Для выяснения *переносного* движения тела в каждый момент времени следует считать тело жестко скрепленным с подвижной системой отсчета, и движение, которое будет совершать тело с подвижной системой отсчета относительно неподвижной системы, и будет переносным движением. Движение тела относительно неподвижной системы координат называется *абсолютным*.

Основной задачей кинематики сложного движения твердого тела является установление соотношений между кинематическими характеристиками абсолютного, относительного и переносного движений. Сложное движение твердого тела может состоять из поступательных и вращательных движений или может быть получено в результате сложения поступательного и вращательного движений. В некоторых задачах кинематики заданное движение твердого тела раскладывают на составляющие движения (анализ); в других – требуется определить сложное движение как результат сложения более простых (синтез). Как при анализе, так и при синтезе движений речь идет о разложении и сложении движений, рассматриваемых в данный момент (мгновенных движений).

5.1. Сложение поступательных движений твердого тела

Пусть твердое тело одновременно участвует в двух мгновенно поступательных движениях, из которых одно является относительным со скоростью $\overline{V}_1$, второе – переносным со скоростью $\overline{V}_2$ (рис. 73). Выделим какую-либо точку тела M. Найдем абсолютную скорость точки M:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 . \tag{113}$$

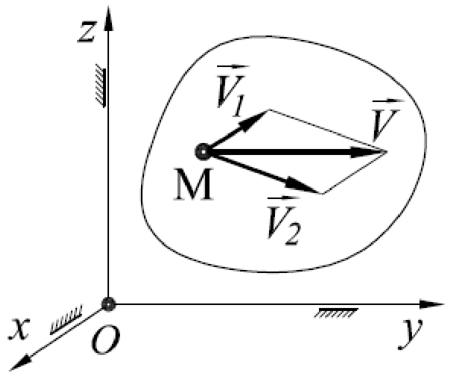


Рис. 73

Так как и относительное, и переносное движение твердого тела являются мгновенно поступательными, то относительные, переносные и, следовательно, согласно формуле (113), абсолютные скорости всех точек тела будут равны между собой в каждый момент времени (равны по величине и параллельны по направлению), т.е. абсолютное движение тела также является мгновенно поступательным.

Очевидно, что данный вывод применим к сложному движению, состоящему из трех и более мгновенно поступательных движений твердого тела. Тогда в общем случае получим абсолютную скорость:

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \ldots + \overline{V}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{V}_k \,. \tag{114}$$

Итак, в результате сложения мгновенных поступательных движений твердого тела результирующее движение получается мгновенно поступательным.

Замечание. Мгновенно поступательное движение твердого тела отличается от поступательного тем, что при поступательном движении в каждый момент времени равны между собой не только скорости, но и ускорения всех точек тела, а при мгновенно поступательном движении в данный момент времени равны между собой только скорости всех точек тела.

5.2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть твердое тело одновременно участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся осей z_1 и z_2. Одно из этих вращений является относительным с мгновенной угловой скоростью $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_r$, а другое – переносным с мгновенной угловой скоростью $\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_e$ (рис. 74).

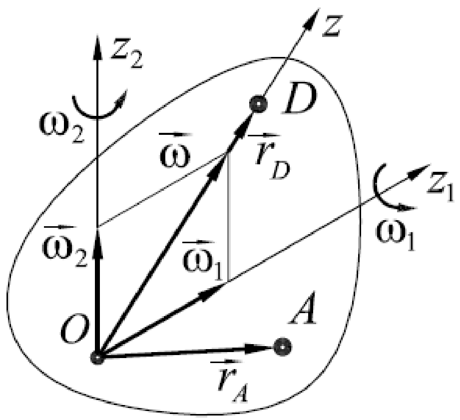


Рис. 74

Очевидно, что точка O пересечения мгновенных осей вращения твердого тела в относительном и переносном движениях является мгновенно неподвижной точкой в абсолютном движении тела, так как она одновременно лежит на осях z_1 и z_2.

Возьмем какую-нибудь точку *A* тела и найдем ее мгновенную абсолютную скорость. В связи с тем, что точка *A* совершает сложное движение, имеем:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_{Ae} + \overline{V}_{Ar},$$

где $\overline{V}_{Ae}$ и $\overline{V}_{Ar}$ – переносная и относительная скорости точки *A*. Обозначим $\overline{OA} = \overline{r}_A$. Тогда по формуле Эйлера будем иметь $\overline{V}_{Ar} = \overline{\omega}_1 \times \overline{r}_A$, $\overline{V}_{Ae} = \overline{\omega}_2 \times \overline{r}_A$.

Следовательно, абсолютная скорость точки *A*:

$$\overline{V}_A = \overline{\omega}_1 \times \overline{r}_A + \overline{\omega}_2 \times \overline{r}_A = (\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2) \times \overline{r}_A.$$

Обозначим векторную сумму переносной и относительной угловых скоростей

$$\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}. \qquad (115)$$

Тогда абсолютная скорость точки A:

$$\overline{V}_A = \overline{\omega} \times \overline{r}_A. \qquad (116)$$

Мгновенная угловая скорость $\overline{\omega}$, как видно из формулы (115) направлена по диагонали параллелограмма, построенного на $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$.

Отложим вектор $\overline{\omega}$, как и векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, от точки *O* и найдем скорость любой точки *D*, лежащей на прямой, направленной вдоль этой диагонали. Так как $\overline{\omega}$ и $\overline{r}_D$ коллинеарны, то $\overline{V}_D = \overline{\omega} \times \overline{r}_D = 0$.

Итак, абсолютные мгновенные скорости точек тела находятся по формуле (116), причем абсолютная скорость тех из них, которые в данный момент лежат на прямой *OD*, равна нулю. Следовательно, вдоль *OD* направлена мгновенная ось абсолютного вращения.

Таким образом, при сложении мгновенных вращательных движений твердого тела вокруг двух пересекающихся осей получается результирующее мгновенное вращательное движение вокруг оси, направленной вдоль диагонали параллелограмма, построенного на мгновенных угловых скоростях составляющих движений. Абсолютная мгновенная угловая скорость равна векторной сумме составляющих угловых скоростей.

Очевидно, что данный вывод можно отнести к движению, состоящему из трех и более мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей. Тогда будем иметь:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega}_k \,. \qquad (117)$$

Этот вывод обосновывает векторную природу мгновенной угловой скорости твердого тела, поскольку мгновенные угловые скорости подчинены правилу векторного сложения.

Доказанное упрощает картину распределения скоростей в теле: скорость в любой точке тела определяют, рассматривая абсолютное движение тела как мгновенно вращательное вокруг мгновенной оси. Величина этой скорости равна произведению величины абсолютной угловой скорости на кратчайшее расстояние (R) от точки до мгновенной оси $V = \omega \cdot R$.

Так как переносное движение является вращательным, то ускорение любой точки тела определяется по теореме Кориолиса.

5.3. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей

Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ вокруг мгновенной оси z_1 и вместе с осью z_1 вращается вокруг оси z_2 с мгновенной угловой скоростью $\overline{\omega}_2$ причем оси z_1 и z_2 параллельны (рис. 75). Движение тела можно рассматривать как сложное,

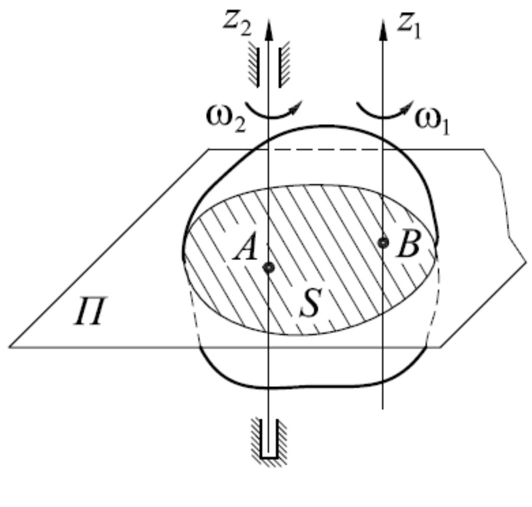


Рис. 75

в котором вращение вокруг оси z_1 является относительным, т.е. $\omega_1 = \omega_r$, вращение самой оси z_1 вместе с телом вокруг оси z_2 – переносным движением, т.е. $\omega_2 = \omega_e$. Очевидно, что все точки тела, как в относительном, так и в переносном движениях остаются в плоскостях, перпендикулярных к осям z_1 и z_2. Поэтому рассматриваемое сложное движение тела является частным случаем плоского движения и для его определения достаточно рассмотреть движение фигуры S в плоскости $П$, перпендикулярной к осям z_1 и z_2.

Исследуем отдельно случаи вращений в одну и противоположные стороны.

Вращения направлены в одну сторону. Пусть A и B – точки пересечения осей z_1 и z_2 с плоскостью $П$ (рис. 76). Найдем абсолютные скорости точек A и B. Так как эти точки совершают сложное движение, то

$$\overline{V}_B = \overline{V}_{Be} + \overline{V}_{Br}, \qquad \overline{V}_A = \overline{V}_{Ae} + \overline{V}_{Ar}. \tag{118}$$

В связи с тем, что точка A лежит на оси относительного вращения z_1, ее относительная скорость V_{Ar}=0, а переносная скорость $V_{Ae} = \omega_2 \cdot AB$, вектор $\overline{V}_{Ae}$ перпендикулярен к AB и направлен в соответствии с ω_2, т.е. $V_A = V_{Ae} = \omega_2 \cdot AB$.

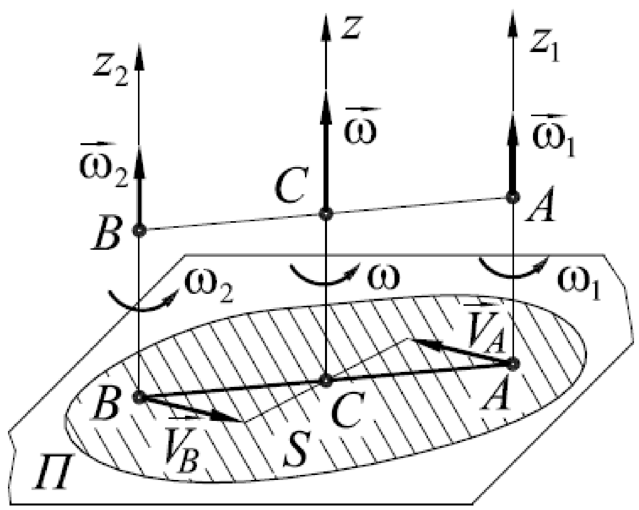


Рис. 76

Так как точка B лежит на оси переносного движения, то для нее относительная скорость будет равна абсолютной, в связи с равенством нулю переносной скорости, т.е.

$$V_{Be} = 0,$$
$$V_B = V_{Br} = \omega_1 \cdot AB. \tag{119}$$

Вектор $\overline{V}_B$ перпендикулярен к AB и направлен в соответствии с ω_1.

Найдем МЦС фигуры S – точку C. Так как существует мгновенно неподвижная точка C, то существует и мгновенно неподвижная ось z в движущемся теле, проходящем через эту точку. Следовательно, абсолютное движение рассматриваемого твердого тела является мгновенным вращением вокруг оси z.

Пользуясь пропорциональностью скоростей точек их расстояниям до МЦС, с учетом равенств (118) и (119), имеем:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \qquad \frac{BC}{AC} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{120}$$

Найдем абсолютную мгновенную скорость тела. Для этого воспользуемся скоростью точки A. Так как эта точка лежит на оси относительного вращения, то ее абсолютная скорость во вращении фигуры вокруг оси z равна переносной, т.е. $\omega \cdot AC = \omega_2 \cdot AB$, но $AB=BC+AC$, поэтому $\omega_2 \cdot AB = \omega_2 \cdot BC + \omega_2 \cdot AC$.

Из отношения (120) $\omega_2 \cdot BC = \omega_1 \cdot AC$, значит,

$$\omega \cdot AC = \omega_1 \cdot AC + \omega_2 \cdot AC, \text{ или } \omega = \omega_1 + \omega_2. \tag{121}$$

Таким образом, приходим к следующему заключению. При сложении двух мгновенных вращений твердого тела вокруг параллельных осей в одном направлении получается результирующее мгновенное вращение вокруг оси, параллельной данным осям, с угловой скоростью, равной сумме составляющих угловых скоростей. Мгновенная ось результирующего вращения делит расстояние между данными осями на отрезки, обратно пропорциональные величинам составляющих угловых скоростей.

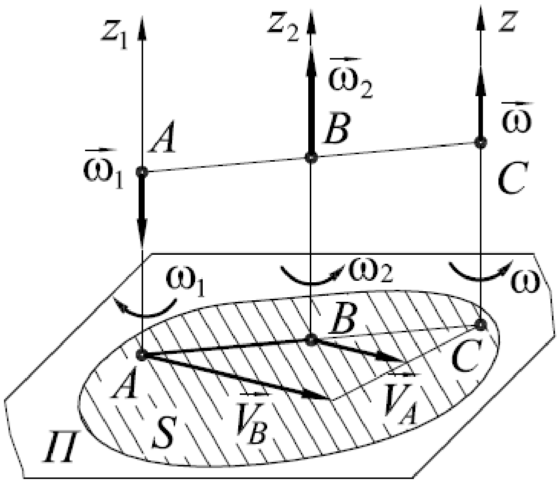


Рис. 77

Зная положение мгновенной оси и абсолютную угловую скорость, легко определить скорость любой точки тела. Ускорение же любой точки тела определяют по теореме Кориолиса.

Вращения направлены в разные стороны (случай когда значение угловых скоростей не равны между собой $\omega_1 \neq \omega_2$).

Допустим для определенности, что $\omega_1 > \omega_2$ (рис. 77).

Найдем $V_A = \omega_2 \cdot AB$, $V_B = \omega_1 \cdot AB$. Векторы $\overline{V}_A$ и V_B перпендикулярны к AB и направлены в соответствии с направлениями ω_1 и ω_2.

МЦС фигуры S – точка C. Через эту точку проходит мгновенная ось абсолютного вращения. Из пропорциональности скоростей точек их расстояниям до МЦС имеем:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{\omega_1 \cdot AB}{\omega_2 \cdot AB} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \qquad \frac{BC}{AC} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{122}$$

Приравнивая абсолютную и относительную скорости точки A, получаем $\omega \cdot AC = \omega_2 \cdot AB$, но $BA = BC - AC$, поэтому $\omega_2 \cdot AB =$ $= \omega_2 \cdot BC - \omega_2 \cdot AC$. Из соотношения (122): $\omega_2 \cdot BC = \omega_1 \cdot AC$, следовательно, $\omega \cdot AC = \omega_1 \cdot AC - \omega_2 \cdot AC$,

$$\text{или} \qquad \omega = \omega_1 - \omega_2. \tag{123}$$

Из рис. 77 видно, что абсолютное мгновенное вращение происходит в сторону того вращения, угловая скорость которого больше.

Таким образом, приходим к следующему выводу. При сложении двух мгновенных вращений твердого тела противоположных направлений вокруг параллельных осей с неравными по модулю угловыми скоростями получается результирующее мгновенное вращение вокруг оси, параллельной данным осям; при этом угловая скорость равна разности данных угловых скоростей и направлена в сторону большей из них. Мгновенная ось результирующего вращения делит внешним образом расстояние между данными осями на части, обратно пропорциональные величинам составляющих угловых скоростей.

Зная положение мгновенной оси и величину мгновенной абсолютной угловой скорости, линейную скорость любой точки тела определяют как во вращательном движении, ускорение этой точки определяют по теореме Кориолиса.

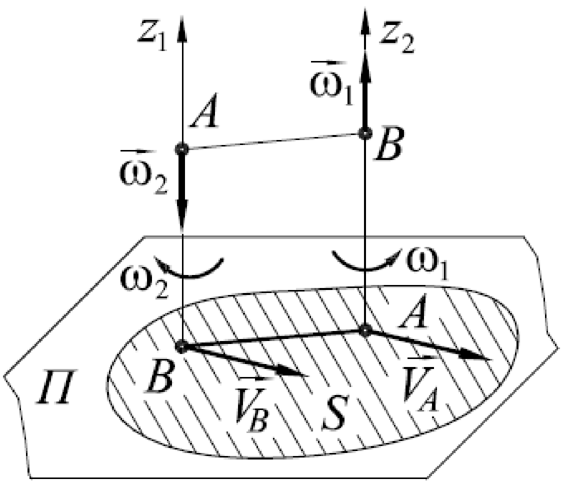


Рис. 78

Пара вращения. Совокупность двух мгновенных вращений твердого тела с равными по величине, но противоположно направленными угловыми скоростями, называется *парой вращения* (рис. 78).

Векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ образуют пару угловых скоростей ($\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$). Рассуждая так же, как и в предыдущих случаях, получим:

$$V_A = \omega_2 \cdot AB,\ V_B = \omega_1 \cdot AB.$$

МЦС фигуры S находится в бесконечности, все точки твердого тела будут двигаться с одинаковыми в данный момент скоростями, т.е. твердое тело совершает мгновенно поступательное движение.

Мгновенная скорость этого движения численно равна $\omega_1 \cdot AB$ или $\omega_2 \cdot AB$, т.е. моменту пары ($\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$). Легко убедиться, что и по направлению мгновенная скорость поступательного движения совпадает с векторным моментом пары ($\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$). Таким образом, пара вращения эквивалентна мгновенно поступательному движению со скоростью, равной моменту пары угловых скоростей этих вращений. Такое движение совершает, например, велосипедная педаль. Обобщая три случая, можно сделать вывод, что:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2\ , \tag{124}$$

где $\omega, \omega_1, \omega_2$ – алгебраические величины мгновенных угловых скоростей абсолютного, относительного и переносного вращений.

5.4. Расчет планетарных и дифференциальных передач

Ранее рассмотрены рядовые передачи и их расчет. *Планетарной* называется такая передача, в которой колесо *1* неподвижно, а оси остальных колес, находящихся в зацеплении, укреплены на кривошипе OA (водиле), вращающемся вокруг оси O неподвижного колеса (рис. 79).

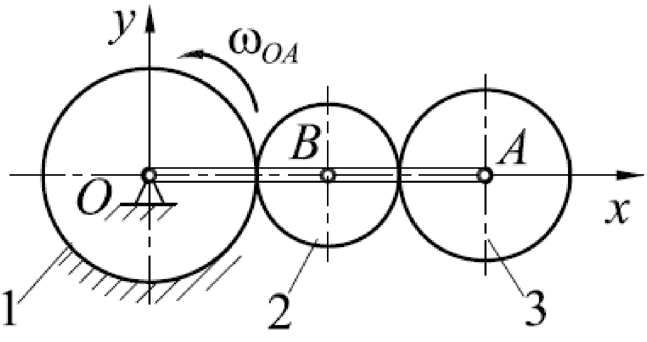
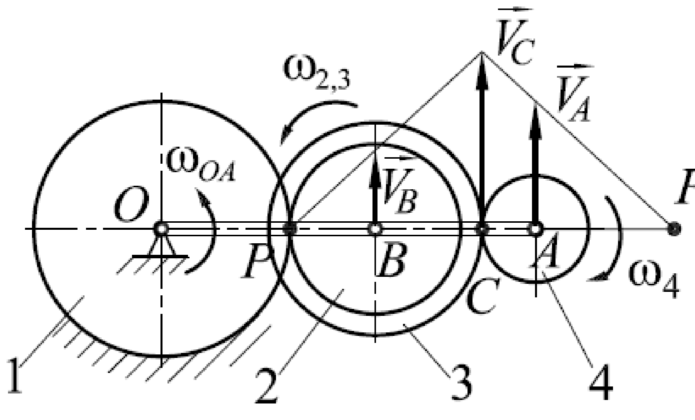


Рис. 79

Дифференциальная передача – такая же, как и планетарная, только в ней колесо *1* может вращаться вокруг оси O независимо от вращения кривошипа.

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно производить, используя теорию о мгновенных центрах скоростей.

Иногда удобно пользоваться методом, позволяющим вместо абсолютного движения тел рассматривать относительное движение. Этот метод называется *методом остановки* или методом Виллиса. Сущность метода остановки состоит в том, что всей неподвижной плоскости Oxy мысленно сообщают вращение с угловой скоростью ω_{OA}, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости кривошипа OA. Тогда кривошип будет неподвижен, а любое i-е колесо будет иметь угловую скорость $\overline{\omega}_i' = \overline{\omega}_i - \overline{\omega}_{OA}$, где $\overline{\omega}_i$ – алгебраическая величина абсолютной угловой скорости i-го колеса, $\overline{\omega}_{OA}$ – алгебраическая величина угловой скорости кривошипа (водила). При этом оси всех колес будут неподвижными и зависимости между $\overline{\omega}_i'$ можно будет определять как и при рядовой передаче.



Таким образом, в соответствии с методом **Рис. 80**

остановки необходимо мысленно остановить то звено механизма, которое приводит этот механизм в движение (кривошип или водило). Затем составляют таблицу значений мгновенных угловых скоростей всех звеньев механизма до и после остановки указанного звена. После этого находят скорости.

Пример 1. Найти угловую скорость (рис. 80) спаренных колес *2* и *3*, а также зависимости между относительными угловыми скоростями каждых двух смежных звеньев механизма, из которых определяются абсолютные мгновенные угловые скорости, если колесо *1* неподвижно. Радиусы колес соответственно равны r_1=60 см, r_2=40 см, r_3=50 см, r_4=25 см. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OA} = \pi$ с$^{-1}$.

Решение

1. Метод мгновенных центров скоростей.

По известной угловой скорости кривошипа *OA* находим скорость точки *B* – центра колес *2*, *3*:

$V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA}(r_1 + r_2) = 100\pi$ см/с.

Так как колесо *1* неподвижно, то МЦС колес *2*, *3* в точке соприкосновения колеса *1* с колесом *2* – точка *P*. Находим величину и направление $\omega_{2,3}$:

$$\omega_{2,3} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_B}{r_2} = 2{,}5\pi \text{ с}^{-1}.$$

Зная угловую скорость колес *2*, *3*, находим скорость точки *C* соприкосновения их с колесом *4*: $V_c = \omega_{2,3} \cdot CP = \omega_{2,3} \cdot (r_2 + r_3) = 225\pi$ см/с.

В связи с тем, что точка *A* принадлежит кривошипу *OA*, скорость этой точки $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = 175\pi$ см/с.

Находим МЦС колеса *4* – точку P_1. Из пропорциональности скоростей точек их расстояниям до МЦС имеем: $\frac{V_A}{V_c} = \frac{AP_1}{CP_1}$;

$$\frac{V_A}{V_c} = \frac{AP_1}{r_4 + AP_1}.$$

Подставляя числовые значения величин, находим AP_1=87,5 см. Определяем величину и направление угловой скорости колеса *4*: $\omega_4 = \dfrac{V_A}{AP_1} = 2\pi$ с$^{-1}$.

Направления скоростей точек и угловых скоростей колес показано на рис. 80.

2. Метод остановки.

Принимаем положительное направление угловых скоростей против часовой стрелки, т.е. $\overline{\omega}_{OA} = \pi$ с$^{-1}$. Мысленно останавливаем кривошип *OA* и составляем таблицу значений угловых скоростей всех звеньев редуктора (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Значение угловых скоростей звеньев редуктора

Наименование звена	Кривошип *OA*	Колесо *1*	Колеса *2, 3*	Колесо *4*
До остановки	ω_{OA}	0	$\omega_{2,3}$	ω_4
После остановки	0	$\omega_1 - \omega_{OA}$	$\omega_{2,3} - \omega_{OA}$	$\omega_4 - \omega_{OA}$

Составляя отношения угловых скоростей колес *1* и *2, 3* и *4* после остановки имеем: $\dfrac{-\omega_{OA}}{\omega_{2,3} - \omega_{OA}} = -\dfrac{r_2}{r_1}$, $\dfrac{\omega_{2,3} - \omega_{OA}}{\omega_4 - \omega_{OA}} = -\dfrac{r_4}{r_3}$.

Подставляя числовые значения известных величин, находим: $\omega_{2,3} = 2{,}5\pi$ с$^{-1}$, $\omega_4 = -2\pi$ с$^{-1}$. Знаки $\overline{\omega}_{2,3}$ и $\overline{\omega}_4$ показывают, что направление вращения колес *2, 3* совпадает с направлением вращения кривошипа, а колеса *4* – противоположно. Видно, что такие же направления получены и при решении первым методом.

Пример 2. Данные те же, что и в примере 1, но колесо *1* вращается независимо от вращения кривошипа с угловой скоростью $\omega_1 = 2\pi$ с$^{-1}$ в ту же сторону, что и кривошип (рис. 81).

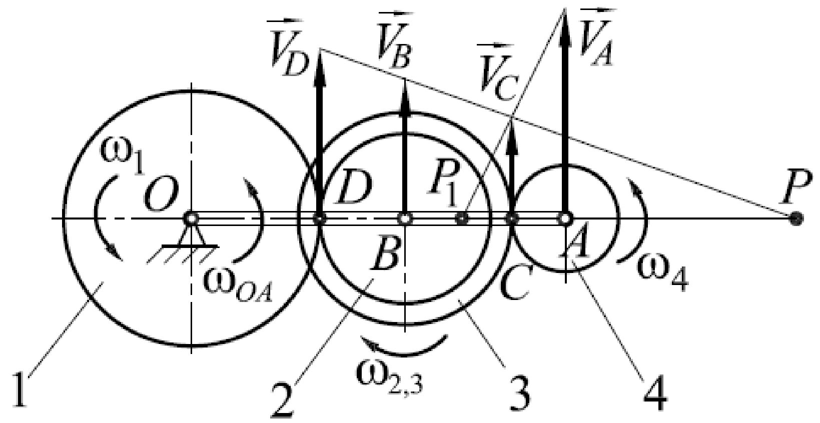


Рис. 81

Решение

1. Метод мгновенных центров скоростей.

По известным угловым скоростям ω_{OA} и ω_1 находим скорости точек B и D $\quad V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA}(r_1 + r_2) = 100\pi$ см/с.

Векторы $\overline{V}_B$ и $\overline{V}_D$ откладываем в масштабе в соответствии с направлениями угловых скоростей.

Находим МЦС колес *2*, *3* – точку Р. Из пропорциональности скоростей точек их расстояниям до МЦС имеем:

$$\frac{V_B}{V_D} = \frac{BP}{DP}, \qquad \frac{V_B}{V_D} = \frac{BP}{r_2 + BP}.$$

Подставляя числовые значения величин, находим BP=200 см. Определяем угловую скорость колес *2*, *3*: $\omega_{2,3} = \dfrac{V_B}{BP} = 0{,}5\pi$ с$^{-1}$.

Зная угловую скорость $\omega_{2,3}$, находим скорость точки C зацепления колес *3* и *4* $V_c = \omega_{2,3} \cdot CP = \omega_{2,3}(BP - r_3) = 75\pi$ см/с.

Для скорости точки A кривошипа OA имеем:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = 175\pi \text{ см/с}.$$

По известным $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_C$ находим МЦС колеса *4* – точку P_1. Так как скорости точек пропорциональны их расстояниям до МЦС, то:

$\dfrac{V_A}{V_c} = \dfrac{AP_1}{CP_1}, \qquad \dfrac{V_A}{V_c} = \dfrac{AP_1}{AP_1 - r_4},$ откуда AP_1=43,75 см.

Находим угловую скорость колеса *4*:

$$\omega_4 = \frac{V_A}{AP_1} = 4\pi \text{ с}^{-1}.$$

2. Метод остановки.

Принимаем направление вращения кривошипа за положительное направление угловых скоростей, т.е. $\omega_{OA} = \pi$ с$^{-1}$, $\omega_1 = 2\pi$ с$^{-1}$. Мысленно останавливаем кривошип и составляем таблицу значений угловых скоростей всех звеньев редуктора (табл. 4.1).

Составляя отношения угловых скоростей колес *1*, *2*, *3* и *4* после остановки имеем: $\dfrac{\omega_1 - \omega_{OA}}{\omega_{2,3} - \omega_{OA}} = -\dfrac{r_2}{r_1}$, $\dfrac{\omega_{2,3} - \omega_{OA}}{\omega_4 - \omega_{OA}} = -\dfrac{r_4}{r_3}$.

Подставляя числовые значения известных величин, находим $\overline{\omega}_{2,3} = -0{,}5\pi$ с$^{-1}$, $\overline{\omega}_4 = 4\pi$ с$^{-1}$. Знаки указывают, что направление вращения колеса *4* совпадает с направлением вращения кривошипа и колеса *1*, а колес *2*, *3* – противоположно, что совпадает с направлениями вращений, полученными первым методом.

5.5. Сложение вращательного и поступательного движений

Предположим, что тело вращается в данный момент с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и одновременно движется поступательно со скоростью $\overline{V}_0$, перпендикулярной к оси вращения. Точка *O* – точка на оси вращения (рис. 82).

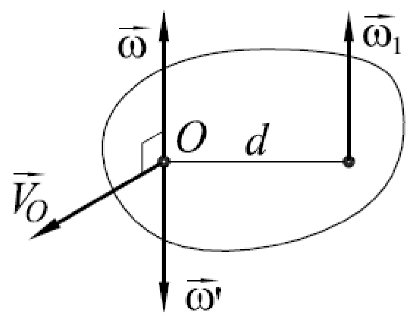


Рис. 82

Заменим поступательное движение со скоростью $\overline{V}_0$ парой вращения $(\overline{\omega}', \overline{\omega}_1)$ так, чтобы $\omega' = \omega_1 = \omega$. Плечо этой пары будет равно:

$$d = \frac{V_0}{\omega}. \tag{125}$$

Эта пара располагается в плоскости, перпендикулярной к вектору $\overline{V}_0$, т.е. в плоскости, проходящей через вектор $\overline{\omega}$. Направление векторного момента пары $(\overline{\omega}', \overline{\omega}_1)$ соответствует направлению $\overline{V}_0$. Пару переместим так, чтобы вектор $\overline{\omega}'$ проходил через точку *O*. Векторы

$\overline{\omega}'$ и $\overline{\omega}$ в совокупности эквивалентны нулю, поэтому у тела остается одно вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ вокруг оси, смещенной на величину d сравнительно с первоначальной осью вращения.

Таким образом, при сложении мгновенного поступательного движения тела со скоростью $\overline{V}$ и мгновенно вращательного с угловой скоростью $\overline{\omega}$ в случае перпендикулярности $\overline{\omega}$ и $\overline{V}$ получается мгновенно вращательное движение тела вокруг оси, параллельной данной с той же угловой скоростью $\overline{\omega}$.

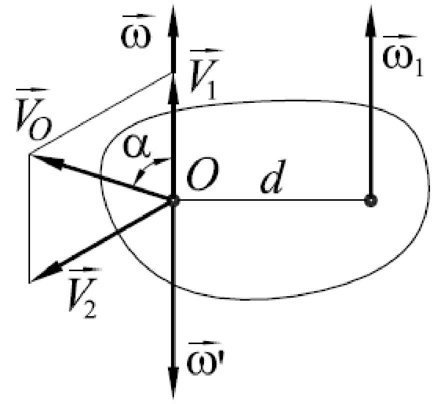


Рис. 83

Допустим, что скорость $\overline{V}_0$ поступательного движения направлена под некоторым углом α к оси вращения, т.е. к вектору $\overline{\omega}$ (рис. 83).

Разложим поступательное движение со скоростью $\overline{V}_0$ на два поступательных движения со скоростями $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$, причем, вектор $\overline{V}_1$ направлен вдоль $\overline{\omega}$, а $\overline{V}_2$ перпендикулярен $\overline{\omega}$.

На основании результата, полученного выше, совокупность движений $\overline{\omega}$ и $\overline{V}_2$ приведем к одному вращению с угловой скоростью $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}$, но вокруг оси, смещенной на расстояние $d = \dfrac{V_2}{\omega}$. Тогда получим два движения: вращательное с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ и поступательное со скоростью $\overline{V}_1$, параллельной оси вращения. Совокупность таких двух движений называют винтовым движением или кинематическим винтом.

Таким образом, при сложении мгновенно поступательного и вращательного движений твердого тела в общем случае получается мгновенное винтовое движение.

Задачи для самоконтроля

Задача 5.1

Редуктор скоростей состоит из трех зубчатых колес (рис. 84).

Первое колесо радиусом r_1=20 см насажено на ведущий вал *I*, делающий n_1=4500 об/мин, второе радиусом r_2=25 см свободно насажено на ось, жестко связанную с ведомым валом *II*, третье колесо с внутренним зацеплением неподвижно. Найти число оборотов в минуту ведомого вала и бегающего колеса.

Задача 5.2

Редуктор скоростей с планетарной передачей (рис. 85) состоит из: неподвижного колеса *1*, жестко связанного с валом *I*; рамки, свободно вращающейся вокруг осей *I* и *II* с угловой скоростью ω; двух шестерен *2* и *3*, жестко связанных между собой и свободно насаженных на ось EF, вращающуюся вместе с рамкой; ведомого колеса *4*, жестко связанного с валом *II*. Определить отношение угловой скорости вала *II* к угловой скорости рамки, если числа зубьев колес z_1=49, z_2=50, z_3=51, z_4=50.

Задача 5.3

Найти угловую скорость ω_{II} ведомого вала редуктора с дифференциальной передачей (рис. 86), если ведущий вал с кривошипом, несущим на себе шестерни, спаренные между собой, вращается с угловой скоростью $\omega_I = 120\ \text{с}^{-1}$.

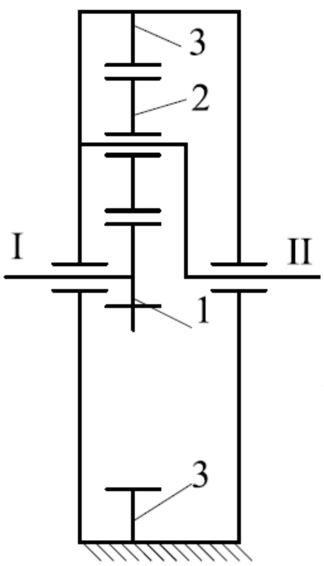


Рис. 84

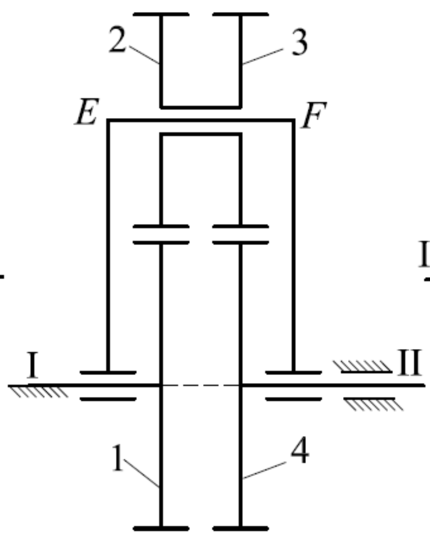


Рис. 85

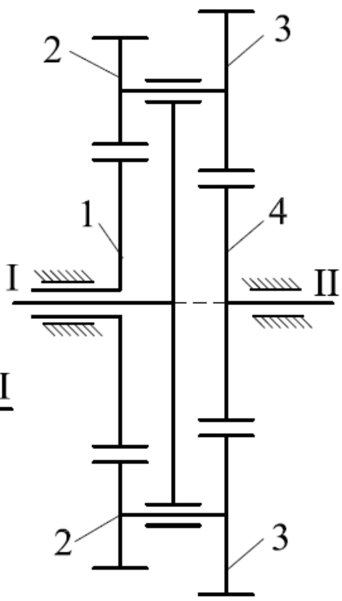


Рис. 86

Колесо *1* вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 180$ с$^{-1}$ и имеет число зубьев z_1=80, бегающие колеса имеют числа зубьев: z_2=20, z_3=40, а колесо *4*, сидящее на ведомом валу *II*, имеет z_4=60 зубьев. Колесо *1* и ведущий вал вращаются в одном направлении.

ОТВЕТЫ

1.1. – 8,41 см/с.
1.2. 2,72 м/с.
1.3. 1,2 м/с.
1.4. 8,4 м.
1.5. 1,2 м/с^2.
1.6. 0,385 м/с^2.
1.7. 8,33 м.
1.8. 15,7 м/с.
1.9. 1,55 м/с^2.
1.10. 2,24 м/с^2.
2.1. 12 с$^{-1}$.
2.2. 10 рад/с.
2.3. 80 с$^{-2}$.
2.4. 0,825 м/с^2.
2.5. 4 м/с^2.
3.1. 0,2 м/с.
3.2. 45°.
3.3. 0,16 м/с.
3.4. 15 м/с.
3.5. 0,346 м/с^2.
3.6. 64 м/с^2.
3.7. 12 м/с^2 .
3.8. 16 м/с^2.
3.9. 40 м/с^2.
3.10. 12 м/с^2.
4.1. 2,5 с$^{-1}$.
4.2. 0,5 с$^{-1}$.
4.3. 0,577 м/с.
4.4. 3,61 м/с.
4.5. ∞.
4.6. 1,41 м/с.
4.7. 1,15 с$^{-1}$.
4.8. 2,83 м/с^2.
4.9. 0,02 м/с^2.
4.10. 0,225 м/с^2.
5.1. n_{II}=1000 об/мин, n_2=1800 об/мин.
5.2. $\omega_2 / \omega = 1/2500$.
5.3. $\omega_{\text{II}} = 280$ с$^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики: учебник / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин, А.Л. Дворников. – М.: Высш. шк., 1983. – 270 с.

2. Дронг, В.И. Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.И. Дронт, В.В. Дубинин, М.М. Ильин; под общей ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 365 с.

3. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1982. – 448 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С. Пятницкий, Н.М. Турхан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

5. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник / С.М. Тарг. – М.: Наука,1972. – 422 с.

6. Яблонский, А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А.А. Яблонский. – М.: Наука, 1981. – 360 с.

7. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифоров. – М.: Высш. шк., 2002. – 367 с.

Учебное издание

Ешуткин Дмитрий Никитович
Грядунова Елена Николаевна
Журавлева Анжелика Викторовна
Калашникова Наталья Григорьевна
Коробко Андрей Викторович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ 2.
КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор В.Л. Сверчкова
Технический редактор Н.А. Соловьева

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Государственный университет - учебно-научно-
производственный комплекс»
Лицензия ИД № 00670 от 05.01.2000 г.

Подписано к печати 14.02.2012 г. Формат 60x90 1/16.
Усл. печ. л. 5,9. Тираж 100 экз.
Заказ №______

Отпечатано с готового оригинал-макета
на полиграфической базе ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК»,
302030, г. Орел, ул. Московская, 65.