В.Т. Еременко
М.Н. Орешина
Н.Г. Пеньков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНПК
УНИВЕРСИТЕТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ - УЧЕБНО-НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС»

В.Т. Еременко, М.Н. Орешина, Н.Г. Пеньков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

Рекомендовано ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК»
для использования в учебном процессе в качестве учебного пособия
для высшего профессионального образования

Орел 2015

УДК 004.056
ББК 32.81
Е70

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные системы»
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Государственный университет - учебно-научно-
производственный комплекс»
В.И. Раков,

кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой «Системы информационной безопасности»
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Брянский государственный технический университет»
М.Ю. Рытов

Еременко, В.Т.

Е70 Математические основы защиты информации: учебное пособие для высшего профессионального образования / В.Т. Еременко, М.Н. Орешина, Н.Г. Пеньков. – Орел: ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК», 2015. – 192 с.

ISBN 978-5-93932-809-8

Учебное пособие содержит материал, посвященный отраслям математики, таким, как элементарная математика, кратные и криволинейные интегралы, векторный анализ и теория множеств, а также приложению математики к теоретическим аспектам дисциплин защиты информации. Рассматривается физический смысл многих понятий, применяемых в дисциплинах, посвященных защите информации, а также математическое описание тех или иных электромагнитных процессов, протекающих в различных системах передачи, обработки и хранения информации.

Предназначено студентам, обучающимся по направлениям подготовки 090900.62 «Информационная безопасность», 211000.62 «Конструирование и технология электронных средств», 210700.62 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», изучающим дисциплину «Математические основы защиты информации».

Также может быть полезно адъюнктам и аспирантам, широкому кругу специалистов, интересующихся различными аспектами передачи, хранения и преобразования конфиденциальной информации.

УДК 004.056
ББК 32.81

ISBN 978-5-93932-809-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Математические основы защиты информации» входит в серию изданий, выпускаемых в ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК» для оказания помощи студентам при овладении соответствующих учебных дисциплин.

При подготовке данного пособия авторы имели в виду широкий и разнообразный круг его пользователей. Они рассчитывали на слушателей различных специальностей, адъюнктов и аспирантов, а также на других специалистов, применяющих в своей деятельности математические основы при изучении и использовании процессов хранения, обработки и передачи конфиденциальной информации.

Разнообразие круга предполагаемых читателей определяет выбор представленных в учебном пособии отраслей математики, таких, как элементарная математика, кратные и криволинейные интегралы, векторный анализ и теория множеств. Основные математические понятия имеют физическое и геометрическое толкование.

Для удобства изучения учебное пособие поделено на разделы, снабженные достаточным количеством иллюстративного материала и предметным указателем.

Впервые создаваемое пособие такого типа не может быть свободно от недостатков, поэтому авторы будут благодарны читателям за замечания, предложения и пожелания.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a \in A$ − элемент a принадлежит множеству A;

$a \notin A$ − элемент a не принадлежит множеству A;

$A = \{a, b, c\}$ − множество A состоит из элементов a, b, c;

$A = \{x_i\}_1^n$ множество A состоит из n элементов x_i;

$A = \{x :, \ldots\}$ − множество A состоит из элементов x, обладающих свойством, указанным после двоеточия;

a, (a, b, c) или $\left\langle a_1, a_{2\,}, \ldots a_n \right\rangle$ − упорядоченное множество;

$a_1 = \text{Пр}_1(a_1, a_2)$, $a_2 = \text{Пр}_2(a_1, a_2)$ − проекции вектора (a_1, a_2) на оси 1 и 2;

$A \subset B, B \supset A$ − множество B включает подмножество A;

$A \subseteq B, B \supseteq A$ − подмножество A включено в множество B;

$A \not\subset B$ − подмножество A не включено в множество B (множество B не включает подмножество A);

$A = \varnothing$ − множество A пусто;

$A \Rightarrow B$ − из высказывания A следует высказывание B (высказывание A является необходимым условием для высказывания B, а высказывание B − достаточным условием для высказывания A);

$A \Leftrightarrow B$ − высказывание A равносильно высказыванию B;

$:\Leftrightarrow$ − утверждение справедливо по определению;

$\exists x$ − существует такое x, что … ;

$\exists ! x$ − существует единственное x, такое, что … ;

$\forall x$ − для любого x;

$A \bigcup B$ − объединение множеств A и B;

$A \bigcap B$ − пересечение множеств A и B;

$A \setminus B$ − разность множеств A и B;

$\text{C}_B A$ − дополнение множества A до множества B;

$A = I \setminus A$ − дополнение множества A до универсального множества I;

$P(Y)$ − множество всех подмножеств некоторого множества Y;

$\sum\limits_{n-1}^{N} a_n$ − сумма N слагаемых $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$\sum\limits_{i=1}^{k} f(N_i)\Delta x_i$ − одномерная интегральная сумма;

$\sum\limits_{i=1}^{k} f(N_i)\,\Delta\sigma_i$ − двухмерная интегральная сумма;

$\sum\limits_{i=1}^{k} f(N_i)\,\Delta V_i$ − трехмерная интегральная сумма;

$\int\limits_a^b f(N)\,\mathrm{d}x$ − определенный интеграл от функции одной переменной $f(N) = f(x)$;

$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\mathrm{d}\sigma$ − двойной интеграл от функции двух переменных $f(N) = f(x, y)$ по плоской области (σ);

$\iiint\limits_{(V)} f(N)\,\mathrm{d}V$ − тройной интеграл от функции трех переменных $f(N) = f(x, y, z)$ по области (V) трехмерного пространства;

$\iint\limits_{(S)} f(N)\,\mathrm{d}S$ − поверхностный интеграл первого рода;

$\int\limits_{(L)} f(N)\,\mathrm{d}l$ − криволинейный интеграл первого рода от функции трех переменных $f(M) = f(x, y, z)$;

$\int\limits_{(AB)} f(M)\,\mathrm{d}x$ − криволинейный интеграл второго рода от функции трех переменных $f(M) = f(x, y, z)$ по координате x;

$\int\limits_{(AB)} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{(AB)} Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{(AB)} R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ − криволинейный интеграл второго рода общего вида;

$\prod\limits_{n=1}^{N} a_n$ − произведение N слагаемых $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ − объединение N множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

$\bigcap\limits_{n=1}^{N} A_n$ − пересечение N множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

N − множество натуральных чисел;
Z − множество целых чисел;
Q − множество рациональных чисел;
R − множество действительных чисел;
$\overline{\mathrm{R}}$ − пополненное (расширенное) множество действительных чисел;
C − множество комплексных чисел;
j − мнимая единица;
$\operatorname{Re} z$ − действительная часть комплексного числа $z \in \mathrm{C}$;
$\operatorname{Im} z$ − мнимая часть комплексного числа $z \in \mathrm{C}$;
$\bar{z}$ − комплексное число, сопряженное комплексному числу $z \in \mathrm{C}$;
$|z|$ − модуль комплексного числа $z \in \mathrm{C}$, или абсолютное значение действительного числа $z \in \mathrm{R}$;
$\operatorname{Arg} z$ − аргумент комплексного числа $z \in \mathrm{C}$;
$z = (a, b) = a + jb$ − алгебраическая форма комплексного числа;
$z = (a, b) = |z|\, e^{j\varphi}$ − показательная форма комплексного числа;
$z = (a, b) = |z| \cos\varphi + |z| \sin\varphi$ − тригонометрическая форма комплексного числа;
$\dot{S}_m = S_m e^{j\varphi}$ − символическое изображение (комплексная амплитуда) косинусоидальной функции $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$;
$[a, b]$ − отрезок;
(a, b) − интервал;
$[a, b), (a, b]$ − полуинтервалы;
$+\infty, -\infty$ и ∞ − бесконечные точки расширенной числовой прямой и их объединение;

$(-\infty, +\infty), (-\infty, a), (b, +\infty)$ − бесконечные интервалы;

$[-\infty, a), (+\infty]$ − бесконечные полуинтервалы;

$q=(A, B, Q)$, $Q \subseteq A \times B$ – соответствие, где множество A – область отправления соответствия, множество B – область прибытия соответствия, множество $Q \subseteq A \times B$ – график соответствия;

$\left.\begin{array}{l} q=(A, B, Q), Q \subseteq A \times B \\ p=(B, C, P), P \subseteq B \times C \end{array}\right\}$ или $q(p)=(A, C, Q\mathrm{O}P), Q\mathrm{O}P \subseteq A \times C$ – композиция соответствий;

$f: X \rightarrow Y$ – отображение f множества X в (на) множество Y;

$X \times Y$ – произведение множества X на множество Y;

$\sup X$ – точная верхняя грань множества X;

$\inf X$ – точная нижняя грань множества X;

$d(x, y)$ – расстояние между точками x и y метрического пространства;

$f(x)$ – функция переменной x;

$y=f(x)$ – переменная y является функцией переменной x;

$y, f(a)$ – значение функции $f(x)$ в точке a;

$\lim\limits_{x \rightarrow a} f(x)$ – предел функции $f(x)$ в точке a (при $x \rightarrow a$);

$x=f^{-1}(y)$ – обратная функция для данной функции $y=f(x)$;

$J: F(x) \rightarrow T$, где $J \subseteq F(x) \times T$ – функционал, однозначно отображающий произвольное множество функций $F(x)$ в числовое множество T;

$y(t)=L[x(t)]$ – оператор L, преобразующий функцию $x(t)$ в функцию $y(t)$;

(X, Γ), где $\Gamma \subseteq X^2$ или $b \Gamma a$ – отношение или элемент $b \in X$ находится в отношении Γ к элементу $a \in A$;

$G=(X, U)$ – граф, где X – множество точек плоскости x_i; U – множество направленных отрезков $u=(x_i, x_j)$, соединяющих все или некоторые из вершин;

G_A – подграф графа $G=(X, U)$;

$\pi=(u_1, \cdots, u_k)$ или $\pi=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ – путь в графе $G=(X, U)$;

$l(u_i)$ – длина дуги графа;

$l(\pi) = \sum\limits_{u_i \in \pi} l(u_i)$ – длина пути в графе;

$\mathrm{U}(a)$ – окрестность точки a;

$\mathrm{U}(a, \varepsilon)$ – ε-окрестность точки a;

$R = \lfloor r_{ij} \rfloor$ – матрица смежности графа, где r_{ij} – элементы матрицы;

$S = \lfloor s_{ij} \rfloor$ – матрица инциденций, где s_{ij} – элементы матрицы;

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_i]_1^n$ – вектор-столбец;

$(x_1, \cdots, x_n) = (x_i)_1^n$ – вектор-строка;

$\vec{x}^{\,\mathrm{T}}$ – вектор, транспонированный вектору $\vec{x}$;

$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$, $\begin{Vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{Vmatrix}$ или $\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ...... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{bmatrix}$ – матрицы размера $m \times n$;

$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – диагональная матрица;

$\vec{a}(t) = a_x(t) \cdot \vec{i} + a_y(t) \cdot \vec{j} + a_z(t) \cdot \vec{k}$ – вектор-функция скалярного аргумента;

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial l} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \cos\alpha + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \cos\beta + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \cos\gamma$ – производная по направлению (l) от функции $\varphi(M)$ в точке M;

$\operatorname{grad}\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\,\vec{k}$ − градиент скалярного поля

$\varphi(x, y, z)$ в его точке $M \quad (x, y, z)$;

$P = \iint\limits_{(S)} a_n\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{(S)} \vec{a}\,n^\circ\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{(S)} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S}$ − поток векторного поля

$\vec{a}(M)$ через поверхность S;

$\int\limits_{(AB)} \vec{a}\,d\vec{r} = \lim\limits_{\delta\to 0} \sum\limits_{i=1}^{k} \vec{a}\,(N_i)\Delta\vec{r}_i$ − линейный интеграл вектора $\vec{a}(N)$

вдоль дуги (AB) кривой L;

$C = \oint\limits_{L} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}$ − циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутой кривой L;

$\mu(M, n^\circ) \quad = \quad \lim\limits_{(S)\to M} \dfrac{\oint\limits_{L} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}}{S}$ − плоскостная плотность циркуляции в точке M;

$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i} + \left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j} + \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}$ − ротор

или вихрь векторного поля $\vec{a}$;

$\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ − дивергенция векторного поля $\vec{a}$

в точке M;

$\vec{\nabla} \quad = \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$ − оператор Гамильтона.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Понятия множества и подмножества

Понятие *множества* является фундаментальным неопределяемым понятием. Интуитивно, согласно [3], под *множеством* будем понимать совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое. Отдельные объекты, из которых состоит множество, называют *элементами* множества.

Заметим, что о множестве можно вести речь только тогда, когда его элементы различимы между собой. Так, можно говорить о множестве конкретных математических понятий (точек, линий, фигур, чисел), букв, слов, изделий, предметов и т. д., но нельзя – о множестве капель в стакане воды, так как невозможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю.

Для обозначения множеств используют прописные буквы $A, S, X \ldots$, прописные буквы с индексами $A_1, A_2, \ldots$ или пару фигурных скобок $\{\ \}$, внутри которых перечисляются элементы множества в виде строчных букв $a, s, x \ldots$ или строчных букв с индексами $a_1, a_{2\,,} a_3, \ldots$, например, множество A, множество A_1, множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Латинские буквы при этом пишутся курсивом. Иногда для обозначения множеств используют буквы греческого алфавита без наклона, например, множество $\mathrm{\mu}$, множество $\mathrm{\eta}$.

Для обозначения принадлежности элемента a_i множеству A применяют символ $\in$, например, $a_i \in A$. Если элемент a_i не является элементом множества A, то пишут $a_i \notin A$.

Задать множество – это значит указать, из каких элементов оно состоит. Для работы с конкретными множествами используют два способа их задания: *перечисление* и *описание*.

Задание множества первым способом соответствует перечислению всех его элементов, например, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Для сокращения записи иногда пишут $A = \{x_i\}_1^n$ или вводят множество индексов $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, например, $A = \{x_i\},\ i \in N$ или $B = \{x_i\},\ i = \overline{1, n}$.

Описательный способ задания множества состоит в том, что указывается характерное свойство, которым обладают все его элементы.

Например, выражение $\{ a \in A \mid 0 < a \in Z \leq 7 \}$ − есть множество целых чисел от 1 до 7, то есть $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$.

Множество A, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. При описательном способе задания выражение пустого множества может принять следующий вид: $\left\{ x \in A \,\middle|\, x^2 - x + 1 = 0 \right\} = \varnothing$.

Различают множества *конечные* (когда число его элементов конечно) *и бесконечные* (когда оно содержит бесконечное число элементов).

Два множества считаются *равными*, или *тождественными*, когда каждый элемент одного множества является элементом другого и обратно. Для обозначения равных множеств используют выражение $A = B$. Из определения равенства множеств вытекает, что порядок элементов в них несущественен. Так, например, множества $A = \{ 2, 4, 6 \}$ и $B = \{ 6, 4, 2 \}$ равны, то есть $A = B$.

Если множество A состоит из элементов, принадлежащих некоторому другому множеству B, то множество A называют *подмножеством*, или *частью множества* B. Для обозначения этого используют специальный символ $\subseteq$ *нестрогого включения*.

При этом утверждение «множество B содержит множество A» записывается в следующем виде: $A \subseteq B$. Если желают подчеркнуть, что множество B содержит и другие элементы, кроме элементов из множества A, то используют символ $\subset$ *строгого включения*. Связь между символами строгого $\subset$ и нестрогого $\subseteq$ включений можно определить выражением $A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \neq B$, где знак $\leftrightarrow$ означает эквивалентность (в смысле «то же самое, что»).

Из приведенного определения вполне очевидно, что подмножествами множества B являются само множество B, а также его пустая часть $\varnothing$.

Множества, элементами которого являются точки прямой, плоскости или пространства, называются *точечными*.

Если в некотором рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фиксированного множества I, то это самое большое множество I называется *универсальным*.

Универсальное множество удобно изображать графически, в виде множества точек прямоугольника – точечного множества, показанного на рис. 1.1.

Отдельные области внутри этого прямоугольника означают различные подмножества универсального множества: $A \subseteq I$, $B \subseteq I$, $C \subseteq I$.

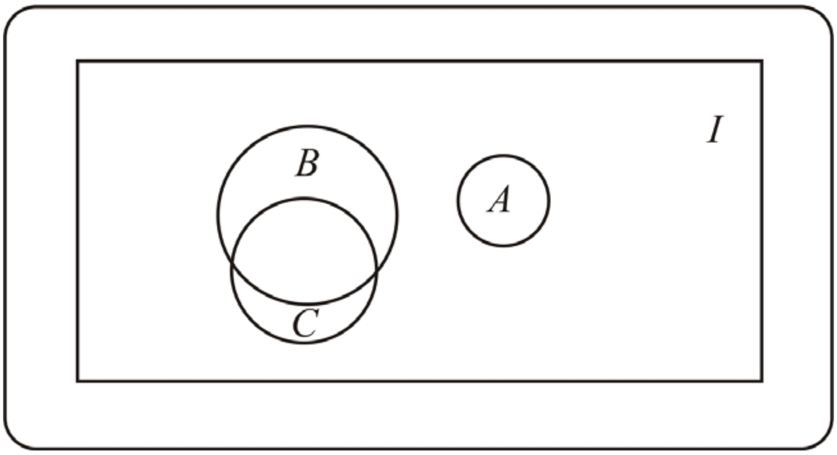


Рис. 1.1. Иллюстрация к понятию универсального множества

Изображение множества в виде областей в прямоугольнике, представляющем универсальное множество, называют *диаграммой Эйлера – Венна*.

1.2. Множество действительных чисел

Множества, элементами которого являются числа, называются *числовыми*.

В зависимости от того, к какому классу чисел относятся элементы множества, различаются числовые множества натуральных, целых, рациональных, действительных (вещественных) и комплексных чисел. В соответствии с [3], эти виды множеств будем обозначать прописными буквами латинского алфавита без наклона.

Натуральными называются числа, применяемые для счета предметов, а также для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывается с помощью девяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *Множество натуральных чисел* обозначим буквой N, то есть $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

Целые числа – это числа натуральные, противоположные натуральным и нуль. *Противоположными* называются числа, которые в сумме с данным числом составляют нуль. *Множество целых чисел* обозначим буквой Z, то есть $\mathrm{Z}=\{\cdots-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\cdots\}$. Вполне очевидно, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, то есть $\mathrm{N}\subset\mathrm{Z}$.

Элементами *множества рациональных чисел* являются целые числа, положительные и отрицательные обыкновенные дроби. *Обыкновенная дробь* – это число вида $\dfrac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа. Число m называется *числителем* дроби, n – *знаменателем*. *Отрицательное число* – это число, меньше чем нуль, а *положительное* – больше, чем нуль. Множество рациональных чисел обозначим буквой Q. Вполне очевидно, что множество натуральных чисел и множество целых чисел являются подмножествами множества рациональных чисел, то есть $\mathrm{N}\subset\mathrm{Q}$, $\mathrm{Z}\subset\mathrm{Q}$.

Элементами *множества действительных* (*вещественных*) *чисел* являются рациональные и иррациональные числа. *Иррациональные числа* – это числа, которые можно записать в виде бесконечной десятичной непериодической дроби. Примером иррационального числа является число $e=2{,}71828...$ Множество действительных чисел обозначим буквой R. Вполне очевидно, что множества натуральных, целых и рациональных чисел являются подмножествами множества действительных чисел, то есть $\mathrm{N}\subset\mathrm{R}$, $\mathrm{Z}\subset\mathrm{R}$, $\mathrm{Q}\subset\mathrm{R}$, а множество R относительно этих подмножеств является универсальным множеством: $\mathrm{R}=I$.

Пополненным (или *расширенным*) *множеством действительных чисел*, обозначаемым символом $\overline{\mathrm{R}}$, называется множество, образованное из всех действительных чисел $x\in\mathrm{R}$ с добавлением двух элементов: плюс бесконечность $(+\infty)$ и минус бесконечность $(-\infty)$, смысл которых будет раскрыт позже. При этом говорят, что $-\infty<+\infty$ и для всех чисел $x\in\mathrm{R}$ справедливо выражение $-\infty<x<+\infty$.

Понимание новых математических понятий упрощается путем изображения множества действительных чисел R в виде прямой, каждой точке которой соответствует действительное число x.

Для отождествления действительных чисел $x\in\mathrm{R}$ с точками прямой зададим этой прямой направление. Всякая прямая, на которой выделено одно из двух ее направлений, называется *осью*. Это направление принимается за *положительное* и обозначается графически стрелкой, как показано на рис. 1.2, *а* противоположное направление – за *отрицательное*.

На этой прямой зафиксируем две различные точки: O и e. Левая точка O, называемая *началом отчета*, совместно с правой точкой e определяет отрезок $[O, e]$, длина которого задает единицу масштаба. Ось, на которой указаны масштаб (отрезок, принимаемый за единицу длины) и начало отчета, называют *координатной осью*, или *числовой прямой,* и обозначают буквами латинского алфавита $x'x$ или цифрами $1'1$.

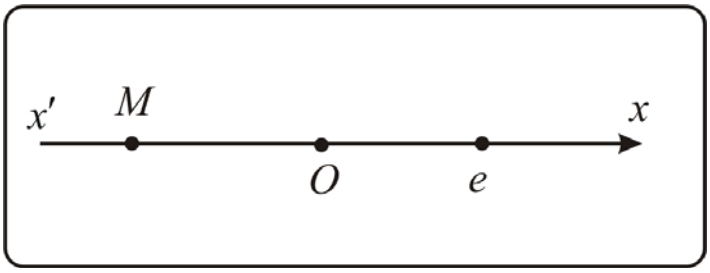


Рис. 1.2. Изображение действительных чисел точками прямой

Точка O делит координатную ось $x'x$ на две части (полуоси): *положительную* Ox (где лежит точка e) и *отрицательную* Ox'. *Координатой точки* M на оси Ox называют число x, определяющее длину отрезка $[O, M]$, взятое со знаком «$+$», если точка M лежит на положительной полуоси, и со знаком «$-$» – если на отрицательной полуоси. Очевидно, что при таком изображении каждой точке M на оси Ox соответствует действительное число x, являющееся ее координатой. И наоборот, каждому действительному числу на этой оси соответствует точка, для которой это действительное число является ее координатой.

Поскольку множеству всех действительных чисел соответствует множество всех точек числовой прямой, а множеству всех точек числовой прямой – множество всех действительных чисел, то эти множества обычно обозначаются одним и тем же символом R. Множеству $\overline{\mathrm{R}}$ соответствует *пополненная* (или *расширенная*) *прямая*. При этом элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются *бесконечными точками* такой прямой.

Подмножество X множества действительных чисел R называется *числовым промежутком*. При этом различают следующие числовые промежутки: интервал (открытый промежуток), отрезок (закрытый промежуток, или сегмент), полуинтервал, луч, открытый луч.

Интервалом называется множество X всех чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$. Обозначается интервал в виде $(a, b) = \{x : a < x < b\}$.

Отрезком именуется множество X всех чисел, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$. Обозначается отрезок в виде $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$. Графически он изображается в виде части прямой Ox, заключенной между двумя ее точками a, b и называемой также отрезком.

Полуинтервалом называется множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x \le b$ или $a \le x < b$. Обозначается полуинтервал следующим образом: $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$ или $[a, b) = \{x : a \le x < b\}$.

Луч – это множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x \ge a$ или $x \le b$. Обозначается луч в виде $[a, +\infty) = \{x : x \ge a\}$ или $(-\infty, b] = \{x : x \le b\}$.

Открытым лучом называется множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x > a$ или $x < b$. Обозначается открытый луч в виде $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$ или $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$.

Любой интервал (a, b), содержащий некоторую точку x_0, называется *окрестностью* этой *точки* и обозначается $\mathrm{U}(x_0)$, то есть $\mathrm{U}(x_0) = (a, b)$, если $x_0 \in (a, b)$. Если точка x_0 расположена в середине своей окрестности (a, b), то она именуется *центром окрестности*, а расстояние $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$ – *радиусом окрестности*. В этом случае подмножество $\{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$ называется ε-*окрестностью точки* x_0 и обозначается $\mathrm{U}(x_0, \varepsilon)$.

Числовые множества характеризуются своими границами, которые подразделяются на верхние и нижние.

Верхней границей множества S вещественных чисел является число *C*, такое, что для любого $x \in S$ имеет место $x \le C$. Чисел, которые могут рассматриваться в качестве верхней границы множества, может быть бесконечно много или не может быть вообще (например, множество всех целых чисел не имеет верхней границы).

Точной верхней границей (*супремумом*) множества *S*, обозначаемой символом $\sup S$, называется верхняя граница, которая не превосходит любую другую верхнюю границу. Заметим, что множество может иметь только одну точную верхнюю границу. Действительно, если числа C_1 и C_2 – две такие границы, то $C_1 \le C_2$ и $C_2 \le C_1$, следовательно, $\sup S = C_1 = C_2$.

Нижней границей множества S называется число c, такое, что для любого $x \in S$ имеет место $x \geq c$. Точной нижней границей (*инфинумом*) множества S, обозначаемой символом $\inf S$, называется нижняя граница, ничуть не меньшая любой другой нижней границы.

1.3. Упорядоченные множества

Наряду с понятием множества как совокупности элементов важным является понятие *упорядоченное множество* (*кортеж*), под которым понимается совокупность (последовательность) элементов, в которой каждый элемент занимает свое определенное место. Сами элементы при этом называются *компонентами* кортежа: первая компонента, вторая и т. д.

Для обозначения кортежа используют различные строчные буквы, а также пару круглых $(\ )$ или угловых $\langle\ \rangle$ скобок, внутри которых в виде строчных букв $a, b, c \ldots$ или строчных букв с индексами $a_1, a_2, \ldots a_n$ перечисляются элементы кортежа, например, кортеж a, кортеж (a, b, c), кортеж $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$.

Число элементов кортежа называется его *длиной*. Кортежи с двумя элементами называются *парами*, с тремя элементами – *тройками*, с n элементами – n-ками (*энками*).

Заметим, что в отличие от обычного множества в кортеже могут быть и одинаковые элементы.

Частными видами кортежа являются кортеж (a) длиной 1 и пустой кортеж $(\ )$ длиной 0.

Упорядоченные множества $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, элементами которых являются вещественные числа (то есть $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathrm{R}$), называются *точками пространства*.

Такой выбор названия объясняется следующим. Известно, что однозначное положение точки M на плоскости определятся с помощью *прямоугольной системы координат*, под которой понимается совокупность двух взаимно перпендикулярных координатных осей $x'x$ и $y'y$ (с установленными направлениями и выбранным масштабом), проведенных на этой плоскости. Положительные направления осей принято выбирать так, чтобы положительный луч Ox после поворота на угол 90° против часовой стрелки совместился с положительным лучом Oy, как показано на рис. 1.3, *а*.

В прямоугольной системе координат однозначное положение точки M на плоскости определяется ее *проекциями на оси* $x'x$ и $y'y$, под которыми понимаются основания перпендикуляров, проведенных из точки M к соответствующим осям. Проекциями точки M, как видно из этого рисунка, будут точки P и Q (основания перпендикуляров MP и MQ), которые расположены на координатных осях $x'x$ и $y'y$.

Поскольку на координатной оси каждой точке соответствует определенное число, то числа x_0 и y_0 (*прямоугольные координаты* или просто *координаты*), измеряющие отрезки OP и OQ в избранном масштабе и взятые положительными или отрицательными в зависимости от направления этих отрезков, соответствуют проекциям P, Q на оси $x'x$, $y'y$ и, следовательно, однозначно определяют положение заданной точки M на плоскости.

Заметим, что сами отрезки OP и OQ часто называются *координатами* точки M.

Таким образом, понимая под компонентами упорядоченного множества (a_1, a_2) координаты точки M, кортеж (a_1, a_2) может рассматриваться как точка на плоскости (рис. 1.3, *б*). И наоборот, каждую точку M на плоскости с координатами a_1 и a_2 можно рассматривать как двухэлементный кортеж (a_1, a_2).

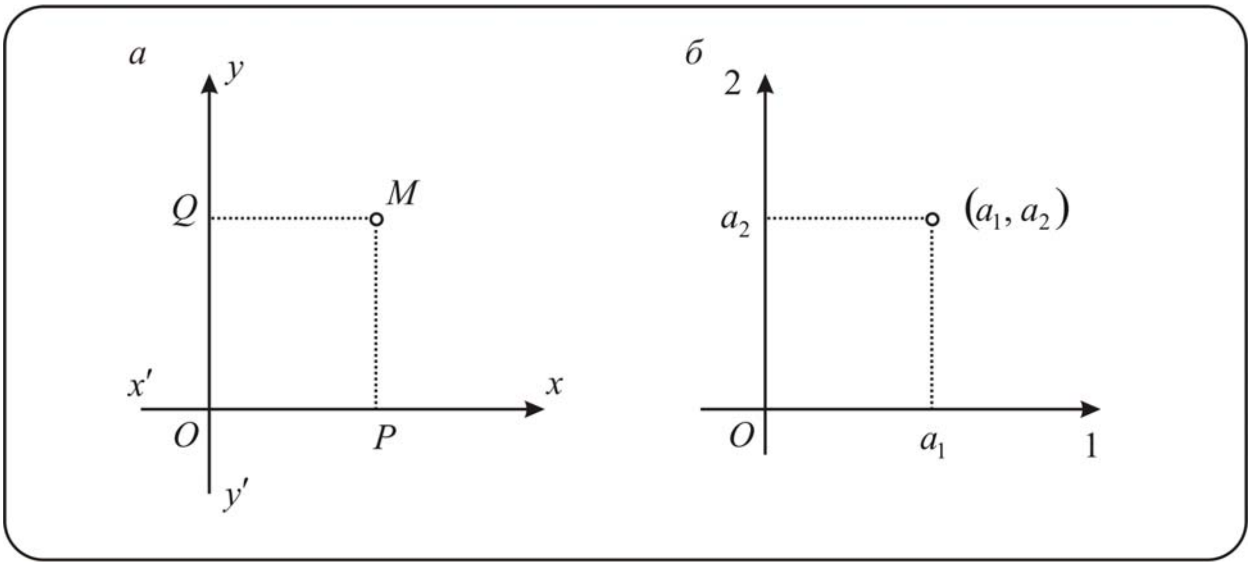


Рис. 1.3. Прямоугольная система координат на плоскости:
а – проекции точки *M* на координатные оси;
б – кортеж (a_1, a_2) как точка на плоскости

Дальнейшие размышления позволяют представить трехэлементный кортеж (a_1, a_2, a_3) в виде точки M пространства, однозначное положение которой определяется *пространственной прямоугольной системой координат*, являющейся совокупностью трех взаимно перпендикулярных осей ($x'x$, $y'y$, $z'z$), проходящих через некоторую общую точку O (рис. 1.4, *а*).

Положительные направления на осях выбираются таким образом, чтобы поворот положительного луча Ox на угол 90°, совмещающий его с лучом Oy, казался происходящим против часовой стрелки, если наблюдать его со стороны луча Oz.

В такой прямоугольной системе координат однозначное положение точки M в пространстве определяется ее *проекциями на оси* $x'x$, $y'y$ и $z'z$, под которыми понимаются основания перпендикуляров, проведенных из точки M к соответствующим осям.

Проекциями точки M, как видно из рисунка, будут точки P, Q и G (основания перпендикуляров MP, MQ и MG), которые расположены на координатных осях $x'x$, $y'y$ и $z'z$.

Поскольку на координатной оси каждой точке соответствует определенное число, то числа (координаты) x_0 (абсцисса), y_0 (ордината) и z_0 (аппликата), измеряющие отрезки OP, OQ и OG в избранном масштабе и взятые в зависимости от направления этих отрезков положительными или отрицательными, соответствуют проекциям P, Q, G на оси $x'x$, $y'y$, $z'z$ и, следовательно, однозначно определяют положение заданной точки M в пространстве.

Таким образом, понимая под компонентами упорядоченного множества (a_1, a_2, a_3) координаты точки M, кортеж (a_1, a_2, a_3) может рассматриваться как точка в пространстве (рис. 1.4, *б*). И наоборот, каждую точку M в пространстве с координатами a_1, a_2 и a_3 можно рассматривать как трехэлементный кортеж (a_1, a_2, a_3).

Дальнейшие обобщения позволяют рассматривать упорядоченное n-элементное множество вещественных чисел $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ как точку M в воображаемом n-мерном пространстве, называемом *гиперпространством*. При этом компоненты n-элементного кортежа $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ будем рассматривать как координаты проекций этой точки на соответствующие оси.

Упорядоченные множества $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, элементами которых являются вещественные числа (то есть $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathrm{R}$), именуются также *векторами* – названием, которое заимствовано из аналитической геометрии и расширяет смысл этого понятия.

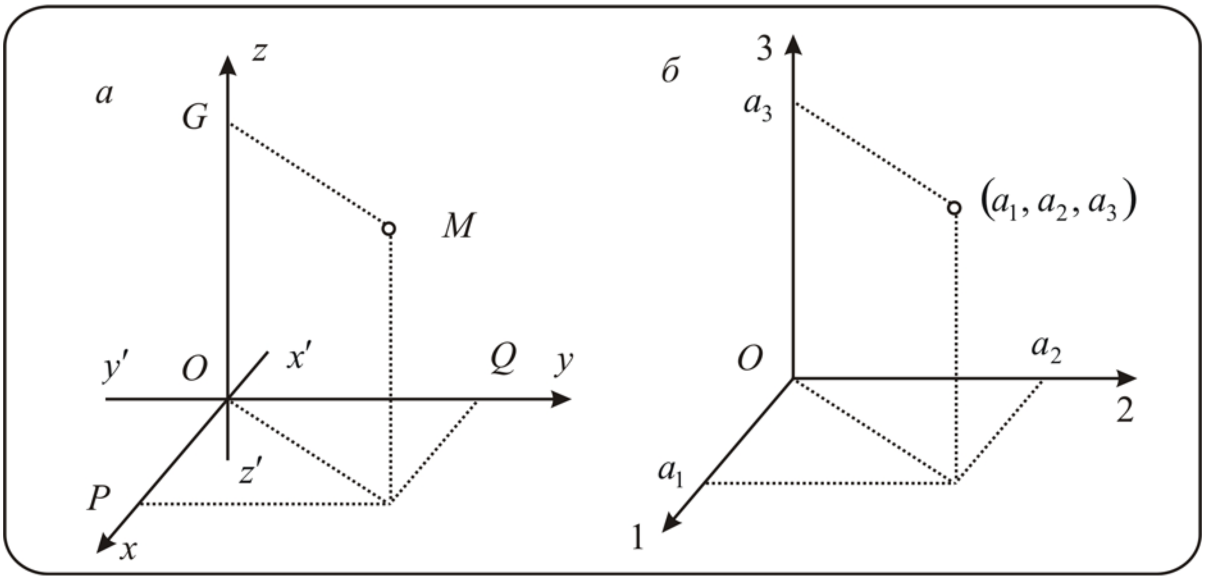


Рис. 1.4. Прямоугольная система координат в пространстве:
а – проекции точки *M* на координатные оси;
б – кортеж (a_1, a_2, a_3) как точка в пространстве

В геометрии *вектором* (в узком смысле) называется всякий направленный отрезок. Вектор принято обозначать буквой, напечатанной жирным шрифтом или со стрелкой вверху, например, вектор $\boldsymbol{b}$ или вектор $\vec{a}$. Иногда для того, чтобы указать начало A и конец B вектора, применяют обозначение $\overrightarrow{AB}$.

Длина вектора (направленного отрезка) называется его *модулем* и обозначается двумя вертикальными чертами – слева и справа, например, $|\vec{a}|$ или $\overrightarrow{AB}$.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными*. Они могут иметь одно и то же (*равнонаправленные векторы*) или противоположные направления. Если начало A и конец B вектора совпадают, то такой вектор обращается в точку, теряя при этом направление, и называется *нуль-вектором*.

Два (ненулевых) вектора равны, если они *равнонаправлены* и имеют один и тот же модуль. Равенство и неравенство векторов обозначается соответственно символами $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{a} \neq \vec{b}$. Из определения равенства векторов следует, что всякие векторы (в любом числе) можно «привести к общему началу», то есть построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало в некоторой точке.

Два вектора, имеющие равные модули и противоположно направленные, называются *противоположными*. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

В геометрии различаются такие понятия, как геометрическая и алгебраическая проекции вектора на ось.

Геометрической проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ *на ось* $x'x$ (*компонентой вектора* $\overrightarrow{AB}$ *по оси* $x'x$) называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$, где A' и B' есть проекции точек начала A и конца B вектора $\overrightarrow{AB}$ на координатную ось (рис. 1.5, *а*).

Алгебраической проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ *на ось* $x'x$ называется длина вектора $\overrightarrow{A'B'}$, то есть число, взятое со знаком «+» или «–», смотря по тому, имеет вектор $\overrightarrow{A'B'}$ то же направление, что ось $x'x$, или противоположное (рис. 1.5, *б*).

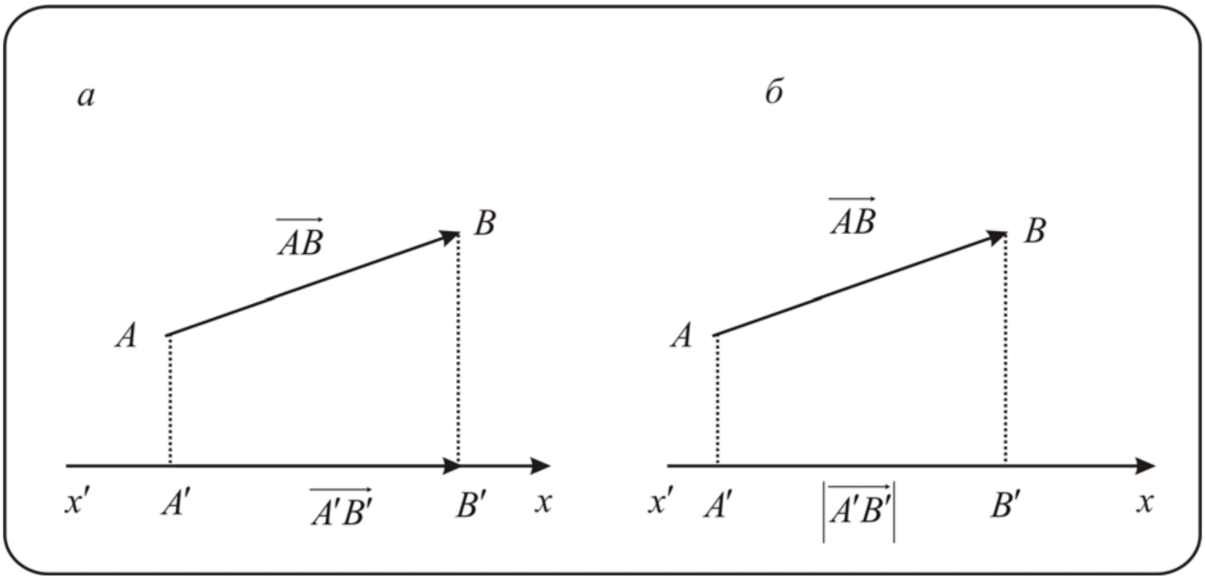


Рис. 1.5. Проекции вектора на ось:
а – геометрическая; *б* – алгебраическая

Для отличия геометрической проекции от арифметической при письме их соответственно обозначают следующими символами: $\text{Пр}_{x'x}\overrightarrow{AB}$ и $\text{пр}_{x'x}\overrightarrow{AB}$.

Положение вектора $\vec{a}$ в пространстве можно однозначно определять тремя его *прямоугольными координатами* (или просто *коорди-*

натами), обозначаемыми прописными буквами X_0, Y_0 и Z_0, под которыми понимаются алгебраические проекции вектора на оси координат.

Понимая под компонентами упорядоченного множества (a_1, a_2) координаты вектора $\vec{a}$, кортеж (a_1, a_2) может рассматриваться как вектор, проведенный на плоскости из начала координат O в данную точку (рис. 1.6, *а*). И наоборот, каждый вектор $\vec{a}$ на плоскости с координатами a_1 и a_2 можно рассматривать как двухэлементный кортеж (a_1, a_2).

Расширяя понятие двухэлементного упорядоченного множества, кортеж (a_1, a_2, a_3) может рассматриваться как вектор, проведенный в трехмерном пространстве из начала координат (рис. 1.6, *б*). Компоненты a_1, a_2 и a_3 в этом случае будут являться алгебраическими проекциями вектора (a_1, a_2, a_3) на оси 1, 2 и 3: $a_1 = \text{пр}_1(a_1, a_2, a_3)$, $a_2 = \text{пр}_2(a_1, a_2, a_3)$, $a_3 = \text{пр}_3(a_1, a_2, a_3)$.

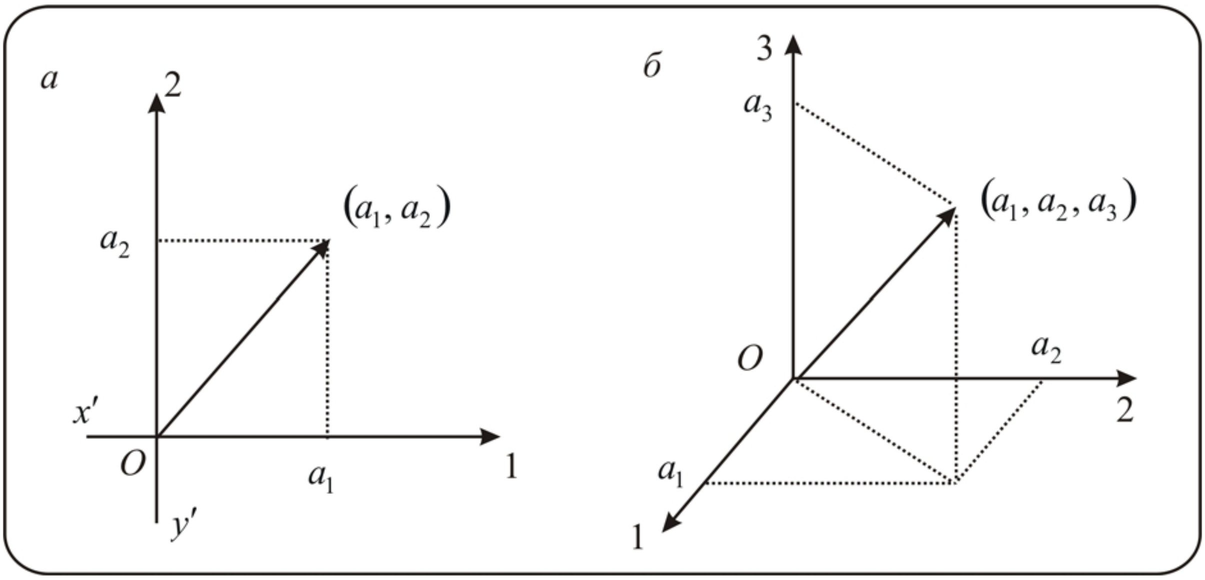
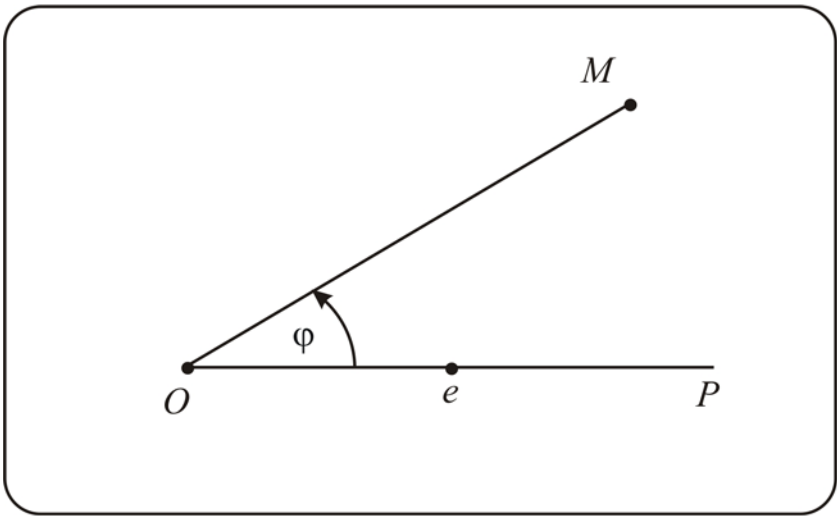


Рис. 1.6. Изображение упорядоченного множества в виде вектора:
а – на плоскости; *б* – в пространстве

Для нахождения положения точки M на плоскости с помощью пар действительных чисел иногда удобно вместо декартовой прямоугольной системы координат использовать полярную систему координат, для определения которой возьмем на плоскости точку O и проходящую через нее полуось OP. Будем называть точку O *полюсом*, а полуось, выходящую из точки O, – *полярной осью*.

Задание полюса O, полярной оси OP и единичного (масштабного) отрезка Oe определяет на плоскости *полярную систему координат* (рис. 1.7).



(ρ,φ)

Рис. 1.7. Полярная система координат

Вполне очевидно, что любой точке M на плоскости в полярной системе координат соответствует определенная пара действительных чисел ρ и φ, которые характеризуют соответственно величину полярного радиуса и величину полярного угла этой точки. Такие числа называются *полярными координатами*.

Полярным радиусом точки M плоскости называется отрезок OM, соединяющий эту точку с полюсом O, а также длина ρ этого отрезка. *Полярным углом* называется угол φ, образованный полярным радиусом OM и осью OP.

Задание любой пары действительных чисел (ρ,φ) позволяет построить на плоскости одну и только одну точку M, для которой эти числа являются ее полярными координатами.

Таким образом, понимая под компонентами упорядоченного множества (ρ,φ) полярные координаты точки M, кортеж может рассматриваться как точка на плоскости. И наоборот, каждую точку M на плоскости с полярными координатами ρ и φ можно рассматривать как двухэлементный кортеж (ρ,φ).

Задание любой пары действительных чисел (ρ,φ) позволяет построить на плоскости один и только один вектор $\overrightarrow{OM}$, для которого эти числа являются его полярными координатами.

Вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий от начала O прямоугольной системы координат к некоторой точке M, называется *радиусом-вектором точки* M и обозначается символом $\vec{r}$ или $\boldsymbol{r}$. Чтобы отличать радиусы-векторы разных точек друг от друга, при букве r ставят значки. Так, радиусы-векторы точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначаются $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$.

Таким образом, понимая под компонентами упорядоченного множества (ρ, φ) полярные координаты радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, кортеж (ρ, φ) может рассматриваться как радиус-вектор на плоскости. И наоборот, каждый радиус-вектор на плоскости с полярными координатами ρ и φ можно рассматривать как двухэлементный кортеж (ρ, φ). В некоторых случаях приходится пользоваться одновременно как декартовыми прямоугольными, так и полярными координатами точек. В связи с этим представляют интерес формулы, позволяющие по декартовым координатам точки находить ее полярные координаты,
и наоборот.

Для нахождения этих формул рассмотрим на плоскости прямоугольную декартову систему координат xOy и полярную систему, у которой полюс совпадает с началом координат O, а полярная ось – с осью абсцисс (рис. 1.8). Единицы масштаба по осям декартовой и полярной систем координат будем считать одинаковыми.

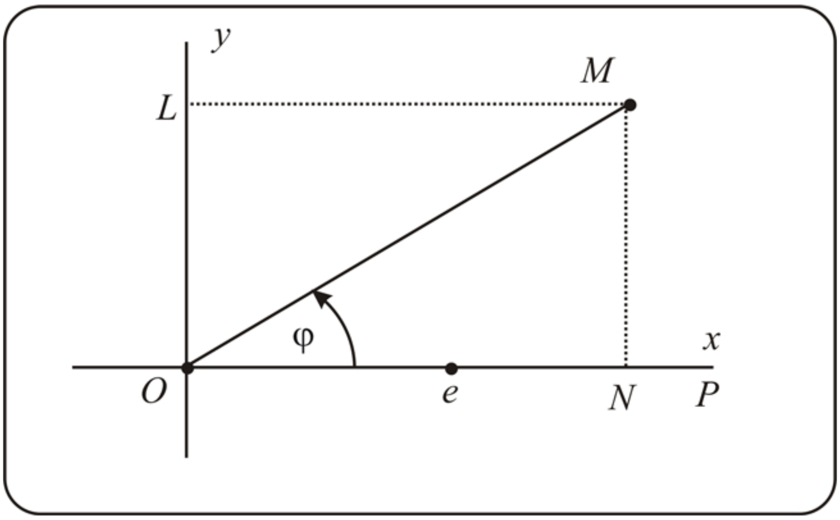


Рис. 1.8. Связь между прямоугольными декартовыми
и полярными координатами

Пусть M – произвольная точка плоскости (отличная от полюса), x_0, y_0 – ее декартовы координаты, а ρ, φ – полярные координаты.

Так как $\cos\varphi = \frac{x_0}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{y_0}{\rho}$, то

$$x_0 = \rho\cos\varphi,\ y_0 = \rho\sin\varphi. \qquad (1.1)$$

Формулы (1.1) выражают прямоугольные декартовы координаты точки M через ее полярные координаты. Поскольку в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, то есть $\rho^2 = x_0^2 + y_0^2$, то справедливы следующие равенства:

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},\ \cos\varphi = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},\ \sin\varphi = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \qquad (1.2)$$

Выражения (1.2) позволяют определить полярные координаты точки M по ее декартовым координатам. Заметим, что если точка M не лежит на оси Oy, то из формул (1.2) следует также соотношение

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_0}{x_0}. \qquad (1.3)$$

Векторы единичной длины, отложенные на осях Ox, Oy и Oz, называются *основными векторами* и обозначаются соответственно буквами латинского алфавита i, j и k. Длина вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ выражается через координаты формулой (рис. 1.9)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \qquad (1.4)$$

Углы α, β и γ, образуемые положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz с вектором $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и определяющие направление вектора, можно найти по следующим формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \qquad (1.5)$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \qquad (1.6)$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \qquad (1.7)$$

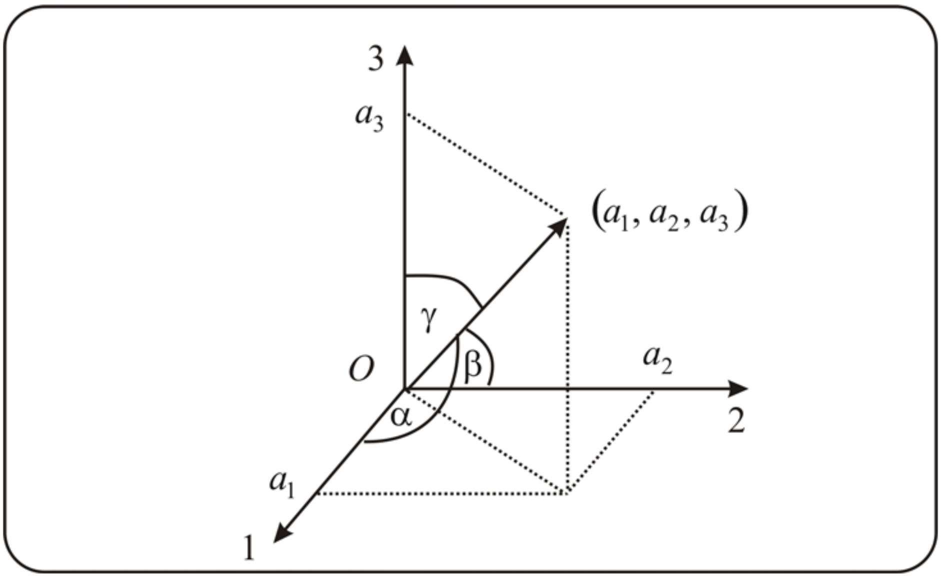


Рис. 1.9. Углы между осями координат и вектором

Если вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ имеет длину, равную единице масштаба, то есть $|\vec{a}| = 1$, то координатные углы α, β и γ определяются следующими выражениями:

$$\cos\alpha = a_1, \quad \cos\beta = a_2, \quad \cos\gamma = a_3. \qquad (1.8)$$

Так как для единичного вектора модуль $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$, то $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ и, как следует из формулы (1.8), $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Заметим, что если векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2}{b_2} = \lambda, \qquad (1.9)$$

где λ – коэффициент пропорциональности.

Если коэффициент λ положителен, то векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ равнонаправлены, если отрицателен – противоположно направлены. Нетрудно заметить, что абсолютное значение коэффициента λ выражает отношение длин $|\vec{a}| : |\vec{b}|$.

Следует обратить внимание на то, что если одна из координат вектора $\vec{b} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ равна нулю, то выражение (1.9) надо понимать в том смысле, что соответствующая координата вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ тоже равна нулю.

Всякий (ненулевой) вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, лежащий на прямой $M'M$ (или параллельный ей), называется *направляющим вектором* этой прямой. Координаты a_1, a_2, a_3 направляющего вектора называются *направляющими коэффициентами прямой*.

Векторы называются *компланарными*, если они, будучи приведены к общему началу, лежат в одной плоскости.

1.4. Соответствия

Соответствием называют тройку множеств

$$q = (A, B, Q),\ Q \subseteq A \times B. \qquad (1.10)$$

Первая компонента этой тройки, называемая *областью отправления соответствия*, представляет собой множество A, элементы которого сопоставляются с элементами множества B.

Второй компонентой, называемой *областью прибытия соответствия*, является множество B, с элементами которого сопоставляются элементы множества A.

Третья компонента представляет собой множество $Q \subseteq A \times B$, определяющее закон (правило), в соответствии с которым осуществляется соответствие (перечисляются все пары (a, b), участвующие в сопоставлении). Эта компонента является *прямым произведением* множеств A и B, под которым понимается множество, состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которого принадлежит множеству A, а вторая – множеству B. Очевидно, что элементами прямого произведения являются двухэлементные кортежи вида (a, b).

Формально прямое произведение можно определить в следующем виде:

$$A \times B = \{(a, b) | \, a \in A, b \in B\}. \tag{1.11}$$

Компоненту Q, как и саму тройку множеств, часто называют также *соответствием*, или *графиком соответствия*. Термин «график» будет более подробно разъяснен при рассмотрении частного вида соответствия, называемого функцией.

Заметим, что закон соответствия может быть задан не только графически, но и другими различными способами

Про элементы $a \in A$ и $b \in B$, входящие в любую пару (a, b), говорят, что они *соответствуют друг другу*.

Геометрически соответствие элемента $b \in B$ элементу $a \in A$ удобно изображать стрелкой, направленной от элемента a к элементу b, как показано на рис. 1.10.

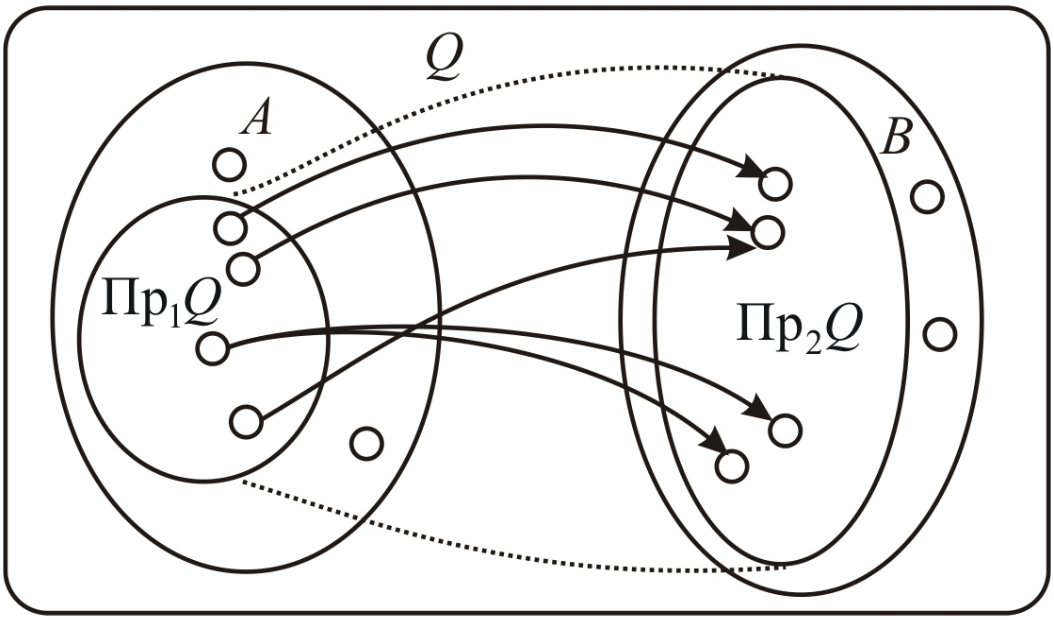


Рис. 1.10. Геометрическое представление прямого соответствия

Заметим, что в соответствии элементу $a \in A$ может не соответствовать ни один элемент из множества B, соответствовать один или несколько элементов $b \in B$, в то же время элемент $b \in B$ может не соответствовать ни одному элементу $a \in A$, соответствовать одному или нескольким элементам множества A.

Для каждого соответствия $q = (A, B, Q)$, $Q \subseteq A \times B$ существует обратное соответствие, которое получается, если данное соответствие рассматривать в обратном направлении, то есть определять элементы $a \in A$, с которыми сопоставляются элементы $b \in B$. Соответствие, обратное соответствию $q = (A, B, Q)$, $Q \subseteq A \times B$, обозначим в виде

$$q^{-1} = \left(A, B, Q^{-1}\right), \ Q^{-1} \subseteq B \times A. \qquad (1.12)$$

Геометрическое представление обратного соответствия получается путем изменения направления стрелок в геометрическом представлении прямого соответствия, как показано на рис. 1.11.

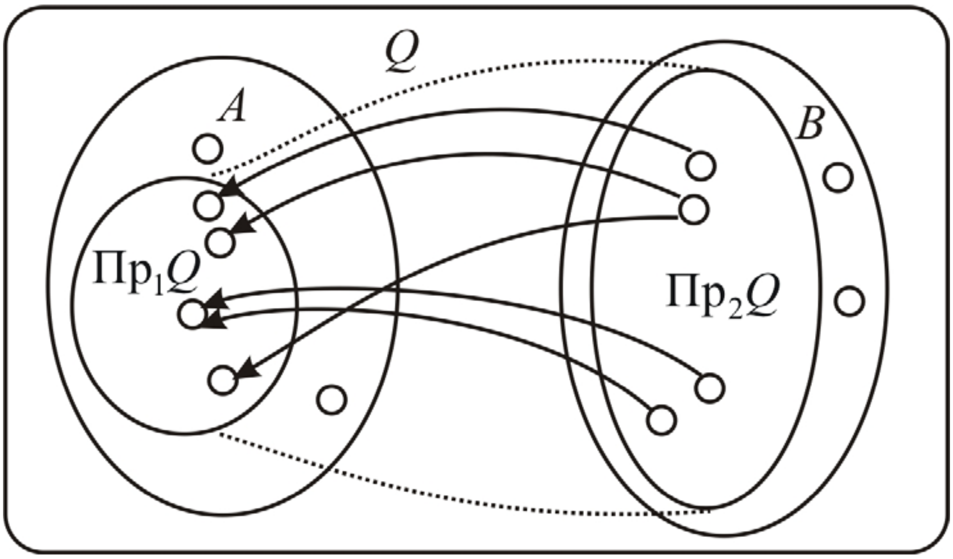


Рис. 1.11. Геометрическое представление обратного соответствия

Отсюда следует, что обратным соответствием обратного соответствия будет прямое соответствие: $\left(q^{-1}\right)^{-1} = q$.

Кроме рассмотренных множеств A, B и Q, с каждым соответствием неразрывно связаны еще два множества: множество $\text{Пр}_1 Q$, называемое *областью определения соответствия*, в которое входят элементы множества A, и множество $\text{Пр}_2 Q$, называемое *областью значений соответствия*, в которое входят элементы множества B, участвующие в сопоставлении (см. рис. 1.10, 1.11).

Последовательное применение двух соответствий:

$$\left.\begin{aligned} q &= (A, B, Q),\ Q \subseteq A \times B \\ p &= (B, C, P),\ P \subseteq B \times C \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

образует *композицию соответствий*.

В ней применяются три множества (A, B и C), на которых определены два соответствия – q и p, причем область значений первого соответствия совпадает с областью определения второго: $\text{Пр}_2 Q = \text{Пр}_1 P$.

Первое соответствие определяет для любого $a \in \text{Пр}_1 Q$ некоторый, возможно и не один, элемент $b \in B$, а второе указывает для любого $b \in \text{Пр}_2 Q$ элемент $c \in \text{Пр}_2 P$.

Таким образом, композиция соответствий сопоставляет с каждым элементом a из области определения первого соответствия $\text{Пр}_1 Q$ один или несколько элементов c из области значений второго соответствия $\text{Пр}_2 P$.

Для упрощения записи композицию соответствий q и p обозначают также в виде $q(p)$, а график композиции соответствий – в виде $Q\text{O}P$. С учетом обозначений композиция соответствий (1.13) записывается в виде

$$q(p) = (A, C, Q\text{O}P),\ Q\text{O}P \subseteq A \times C. \tag{1.14}$$

1.5. Отображения множеств

Частным видом соответствия является *отображение*, под которым понимается соответствие $q = (A, B, Q)$, $Q \subseteq A \times B$, удовлетворяющее условию: каждому элементу одного множества (A) сопоставляется один или несколько элементов другого множества (B), то есть $A = \text{Пр}_1 Q$, а $\text{Пр}_2 Q \subseteq B$.

Такое всюду определенное соответствие – отображение – записывается как

$$Q : A \to B, \tag{1.15}$$

где подмножество $Q \subseteq A \times B$, устанавливающее соответствие между множествами A и B, так же как и тройка множеств $q = (A, B, Q)$, называется *отображением*.

Отметим отличие понятия *отображение* от понятия *соответствие*: в соответствии области определения $\text{Пр}_1 Q$ и значения $\text{Пр}_2 Q$ являются подмножествами областей отправления A и прибытия B ($\text{Пр}_1 Q \subseteq A$, $\text{Пр}_2 Q \subseteq B$), а в отображении область определения $\text{Пр}_1 Q$ равна области отправления A ($\text{Пр}_1 Q = A$, $\text{Пр}_2 Q \subseteq B$).

Таким образом, отображение Q каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие некоторое подмножество $Qa \subseteq B$, называемое *образом* элемента a. При этом множество всех элементов a, которым соответствуют элементы b, называется *прообразом* элементов b во множестве A при отображении Q.

Наглядно отображения, так же как и соответствия, изображают геометрически, представляя элементы множеств A и B в виде точек ограниченной плоскости, а правило Q, задающее это отображение $Q: A \to B$, – в виде множества стрелок (рис. 1.12).

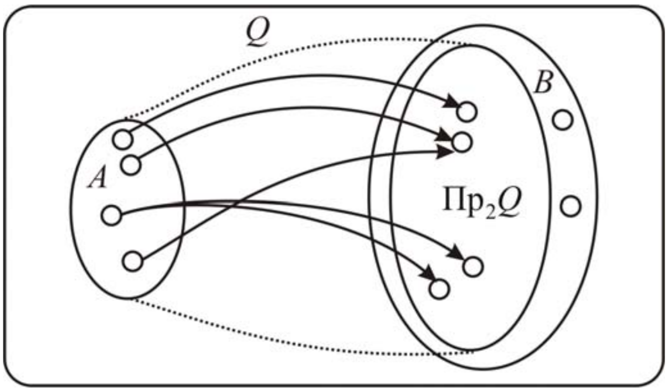


Рис. 1.12. Геометрическое представление отображения

Если во множестве B есть хотя бы один элемент, на который не указывает ни одна из стрелок, то это свидетельствует о том, что область значений отображения $\text{Пр}_2 Q$ не заполняет все множество B, то есть $\text{Пр}_2 Q \subseteq B$. Такое соответствие называется *отображением в множество*.

Если же $\text{Пр}_2 Q = B$, то такое отображение $Q: A \to B$ называется *отображением на множество* (рис. 1.13).

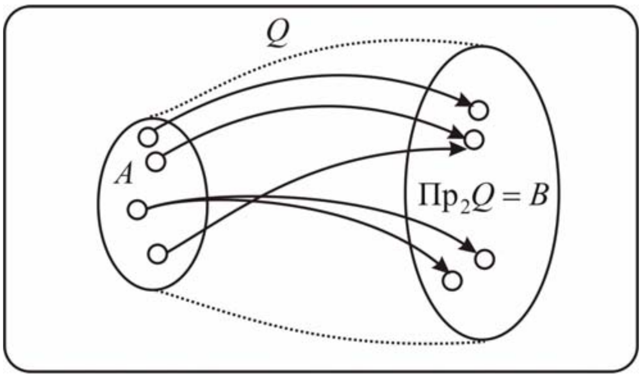


Рис. 1.13. Геометрическое представление отображения на множество

При выполнении условия $\forall a \in A\ \exists\, b \in \text{Пр}_2 Q \subseteq B$ отображение $Q: A \to B$ называется *многозначным* (см. рис. 1.12, 1.13), а условия $\forall a \in A\ \exists!\, b \in \text{Пр}_2 Q \subseteq B$ – *однозначным* (рис. 1.14).

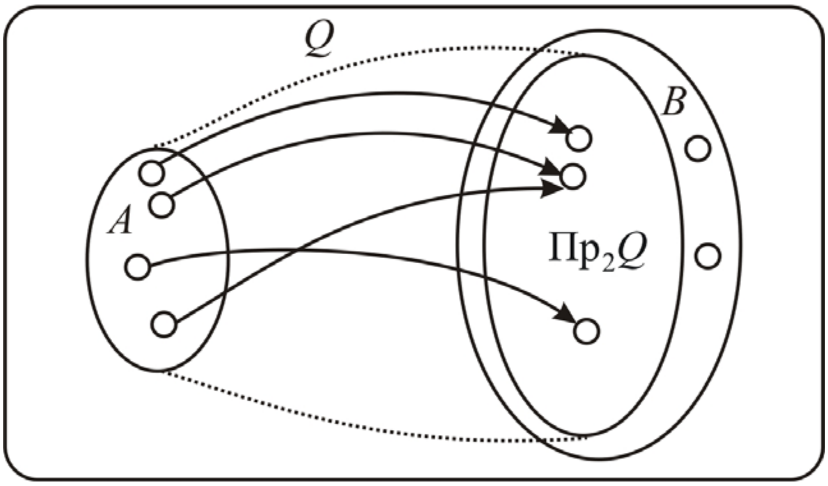


Рис. 1.14. Геометрическое представление однозначного отображения

Заметим, что однозначное и многозначное отображения могут быть как отображениями в множество, так и на множество.

Если выполняются одновременно два условия: $\forall a \in A\ \exists!\, b \in \text{Пр}_2 Q$ и $\forall b \in B\ \exists!\, a \in A = \text{Пр}_1 Q$, то отображение называется взаимно однозначным. Графически такое отображение представлено на рис. 1.15.

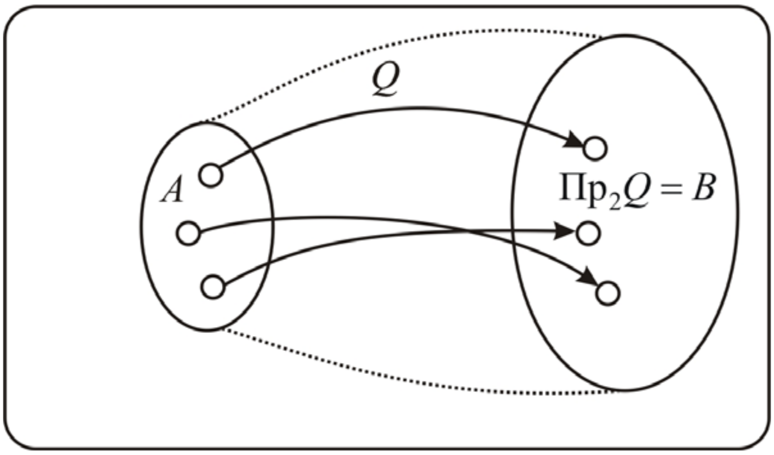


Рис. 1.15. Геометрическое представление взаимно однозначного отображения

Отображение $Q : A \to B$ есть *сюръекция*, если выполняются условия $\forall a \in A \, \exists ! \, b \in \text{Пр}_2 Q = B$ и $\forall b \in B \, \exists \, a \in A$.

На рисунке 1.16 в таком случае к каждому элементу множества B направлено не менее одной стрелки, а от каждого элемента множества A – одна стрелка.

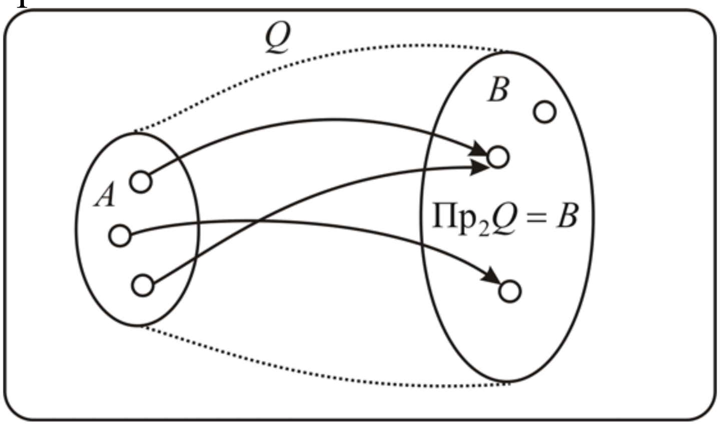


Рис. 1.16. Геометрическое представление сюръективного отображения

Таким образом, сюръективное отображение – это однозначное отображение на множество.

Если от каждого элемента множества A направлена одна стрелка, а к любому элементу $b \in B$ – не более одной, то отображение $Q : A \to B$ называется *инъекцией* (рис. 1.17).

Заметим, что при инъективном отображении стрелки могут быть направлены не ко всем элементам множества B. В этом случае выполняются следующие условия: $\forall a \in A \, \exists ! \, b \in \text{Пр}_2 Q \subset B$

и $\forall b \in \text{Пр}_2 Q \subset B \ \exists! a \in A$. Таким образом, инъективное отображение – это однозначное отображение в множество.

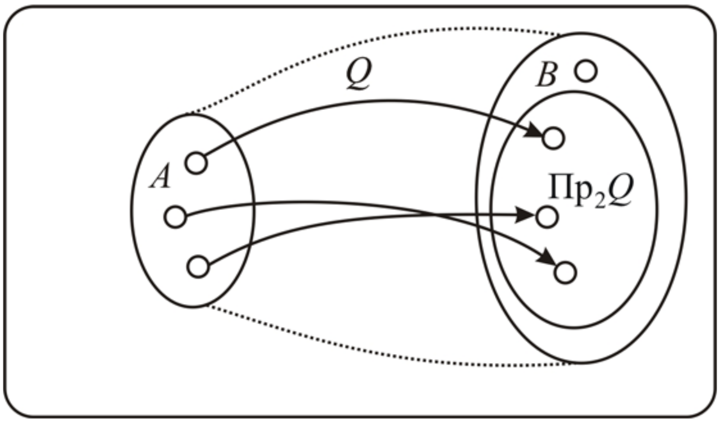


Рис. 1.17. Геометрическое представление инъективного отображения

Отображение $Q: A \to B$ называется *биективным*, или *биекцией*, если каждый элемент $b \in B$ является образом некоторого и притом единственного элемента из множества A.

В этом случае выполняются условия $\forall a \in A \ \exists! b \in B$ и $\forall b \in B \ \exists! a \in A$ (рис. 1.18).

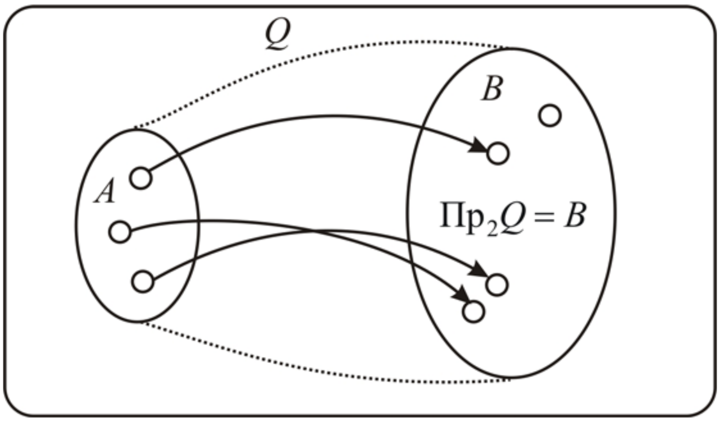


Рис. 1.18. Геометрическое представление биективного отображения

По сути, биективное отображение в этом случае устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами A и B, то есть является *взаимно однозначным*.

Вполне очевидно, что отражение биективно тогда и только тогда, когда оно одновременно инъективно и сюръективно. В этом случае стрелки соединяют попарно каждый элемент из множества A с каждым элементом из множества B. При этом никакие два элемента из множества A не могут быть соединены стрелкой с одним и тем же элементом из множества B, так же как и никакие два элемента из множества B не могут быть соединены стрелкой с одним и тем же элементом из множества A.

1.6. Функции

1.6.1. Общие сведения о функции

Из определения отображения, а также из приведенных ранее частных их видов (сюръекции, инъекции, биекции) следует, что элементами множеств A и B могут быть объекты любой природы. Однако
в прикладных задачах, касающихся электроснабжения и электропитания, большой интерес представляют сюръективные отображения, у которых множества A и B (обозначим их соответственно буквами X и Y) являются множествами чисел (комплексных или вещественных), а множество Q (обозначим буквой f) – множеством пар (x, y), определяющих сопоставление элементов $x \in X$ с элементами $y \in Y$. Такое сюръективное отражение называется функцией.

Таким образом, *функцией* называется сюръективное отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее следующим условиям: $\forall x \in X \; \exists ! \, y \in Y$, $\forall y \in Y \; \exists \, x \in X$ и $X, Y \subseteq \mathrm{R}$ (или $X, Y \subseteq \mathrm{C}$).

Понятие *функции* является чрезвычайно широким, поэтому изучению отдельных классов функций посвящены многие математические дисциплины (алгебра, тригонометрия, теория множеств, теория вероятностей и т. п.). Рассмотрим только общие свойства функций и некоторых их классов.

Часто для упрощения записи $f : X \to Y$ функция обозначается буквой f или символом $f(x)$.

Множество X называется *областью определения функции* f, а элемент $x \in X$ – *аргументом функции*, или *независимой переменной* (понятие *переменная* будет раскрыто позже).

Множество Y называется *областью значений функции*, а элемент $y \in Y$ – *зависимой переменной*, или *значением функции* f *в точке* x. Значение функции $y \in Y$ в точке $x \in X$ часто обозначается так же, как и сама функция, символом $f(x)$. Обозначение одним и тем же символом $f(x)$ функции и ее значения не вызывает недоразумений, поскольку в каждом конкретном случае ясно, что имеется в виду.

Заметим, что значение переменной y в любой из пар $(x, y) \in f$ называют также *функцией* от заданного аргумента x и поэтому записывают, как и саму функцию, в виде $y = f(x)$.

Если множества X и Y являются множествами вещественных чисел, то элементы $(x, y) \in f$ можно, как было показано ранее, изображать в виде точек на плоскости. Полная совокупность таких точек называется *графиком функции* $f(x)$.

Вышесказанное позволяет установить следующие способы задания функции – правила, позволяющие по заданной (независимой) переменной x найти значение зависимой переменной y:

- изображение в виде точек на плоскости – график;
- перечисление всех пар $(x, y) \in f$ в том или ином виде, например, с расположением их в таблицы (очевидно, что такой способ задания функции применим, если множество X является конечным);
- составление математического выражения (формулы или ее части), содержащего перечень математических операций (понятие их будет раскрыто в дальнейшем), которые нужно произвести над величиной x, чтобы получить значение y.

Графики функции и отображения (не являющегося функцией) приведены на рис. 1.19, *а* и *б*.

Наряду с понятием *функция* используют понятие *обратная функция*, под которой понимают функцию, определенную на множестве ее значений и ставящую в соответствие каждому его элементу полный прообраз этого элемента [3]. Обратная функция обозначается символом f^{-1}. Таким образом, для данной функции $y = f(x)$ обратная функция есть $x = f^{-1}(y)$.

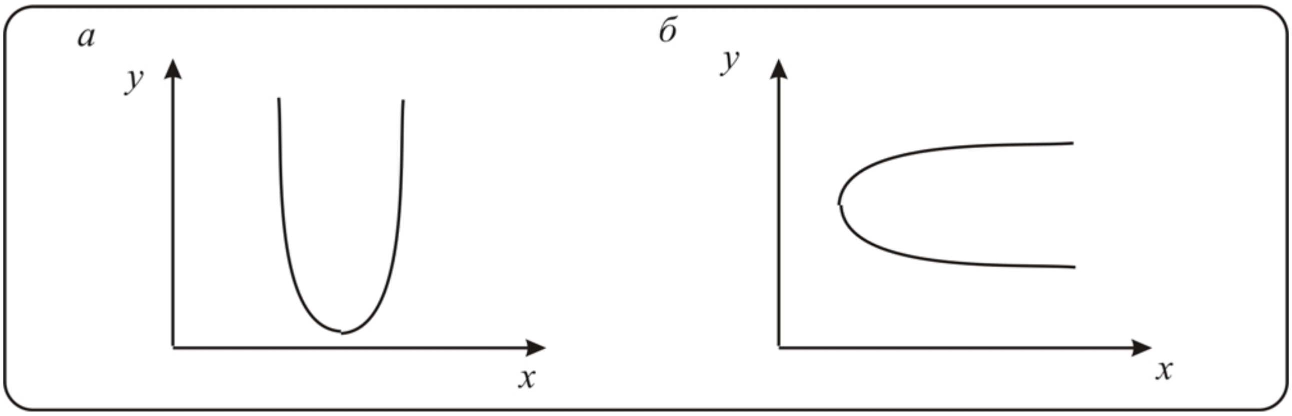


Рис. 1.19. Иллюстрации к понятию функции:
а – график функции; *б* – график отображения

Вполне очевидно, что понятие *обратная функция* применимо только для биективного отображения (рис. 1.20), которое, во-первых, является однозначным (то есть для любых пар $(x_1, y_1) \in f$ и $(x_2, y_2) \in f$ из условия $x_2 = x_1$ следует условие $y_2 = y_1$) и, во-вторых, является взаимно однозначным (то есть из условия $x_2 \neq x_1$ следует условие $y_2 \neq y_1$). Пример функции, имеющей обратную функцию, приведен на рис. 1.20, *а*. Функция на рис. 1.20, *б* обратной функции не имеет, однако ее отдельные ветви, обозначенные жирной и тонкой пунктирной линиями, ее имеют.

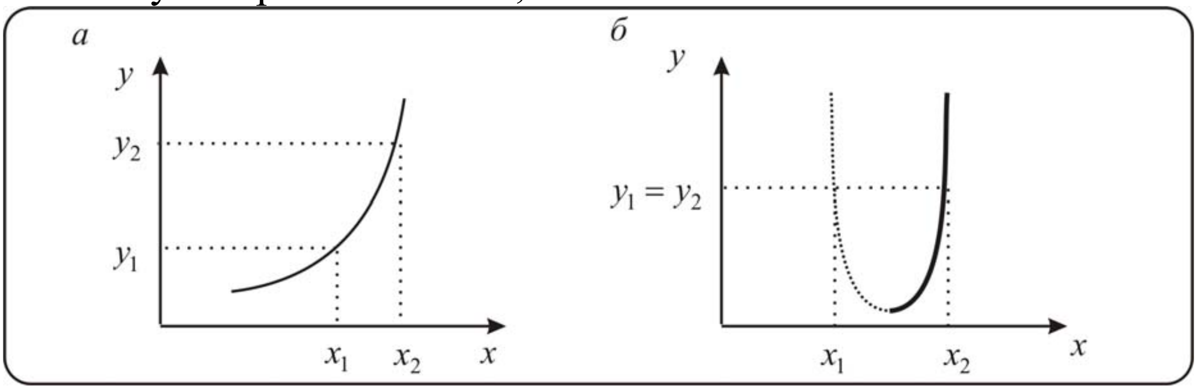


Рис. 1.20. Иллюстрация к понятию «*обратная функция*»

В математике различаются понятия: четные и нечетные, возрастающие и убывающие функции. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x) = f(-x)$, при выполнении равенства $f(-x) = -f(x)$ она называется *нечетной* (рис. 1.21).

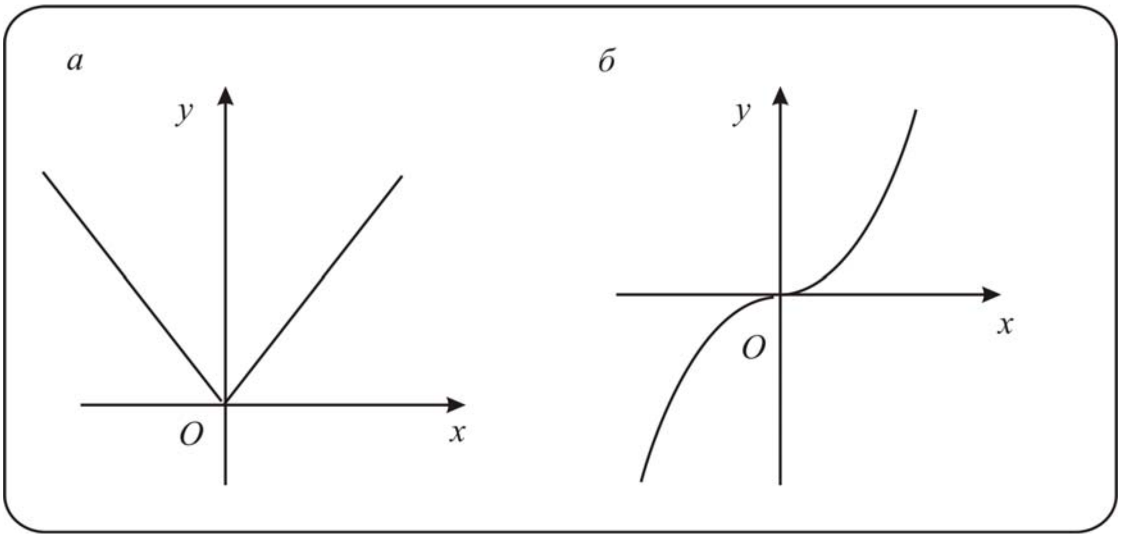


Рис. 1.21. Графики функций:
а – четной; *б* – нечетной

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если для любых $x_1 < x_2$ из множества X выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, если же для любых $x_1 < x_2$ из промежутка X выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *убывающей*. Примерами возрастающей и убывающей функций являются функции, графики которых изображены на рис. 1.22.

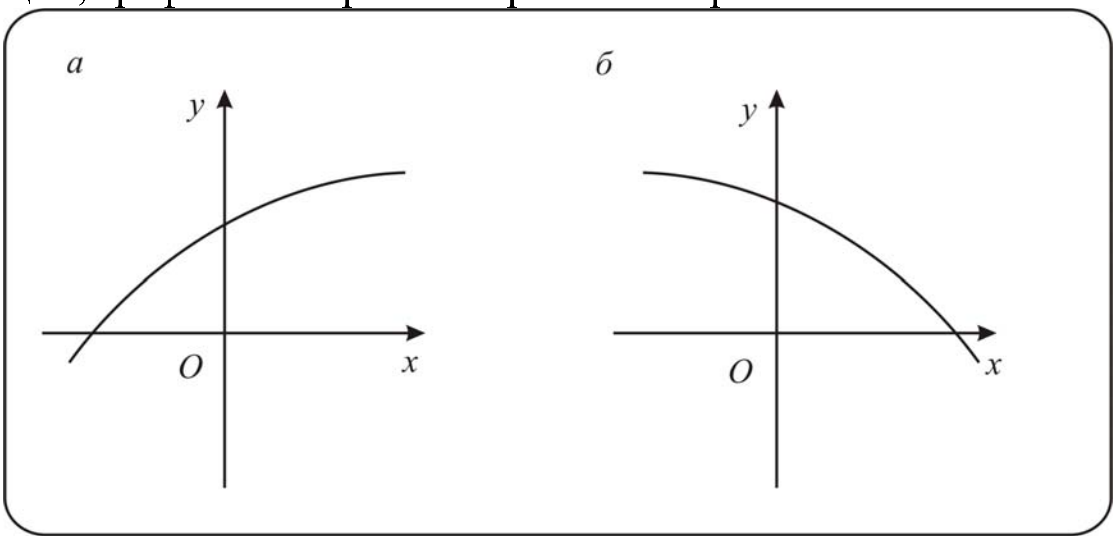


Рис. 1.22. Графики функций:
а – возрастающей; *б* – убывающей

Функция $f(x)$, определенная при всех значениях переменной x, называется *периодической*, если существует такое число $l \neq 0$, что при любых x выполняется равенство

$$f(x \pm l) = f(x). \qquad (1.16)$$

Наименьшее положительнее число l, обладающее указанными свойствами, называется *основным периодом функции* и обозначается буквой T. Очевидно, что числа $2T, 3T, \ldots, nT$ также являются периодами этой функции. Геометрически периодичность функции означает, что ее график, построенный для отрезка $a \le x \le a+T$, должен повторяться через каждый промежуток длины T (рис. 1.23).

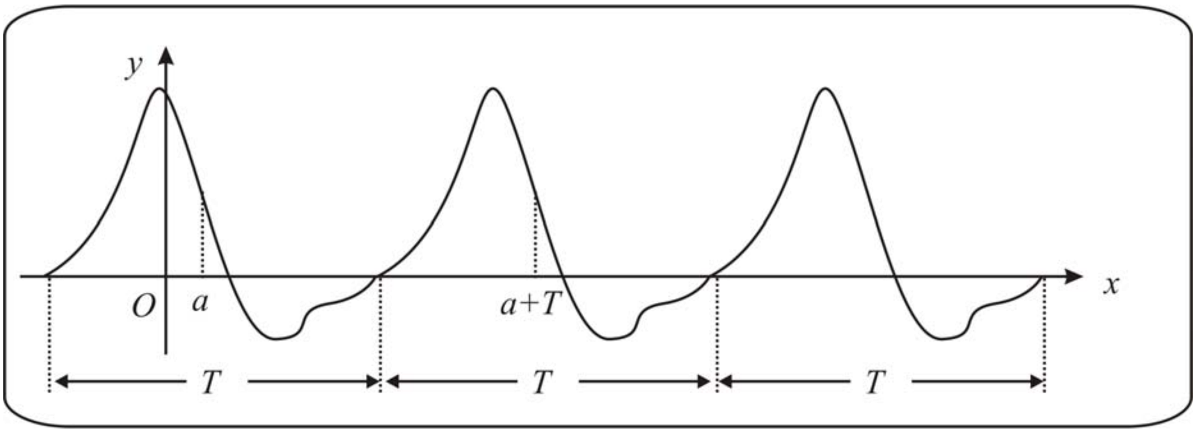


Рис. 1.23. График периодической функции

Отметим основные свойства периодических функций:

– сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода T есть периодические функции этого же периода;

– если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(kx)$ – период T/k;

– если функция $f(x)$ периода T интегрируема на некотором отрезке длины периода, то она интегрируема на всяком другом отрезке той же длины, и при этом величина интеграла остается неизменной, то есть $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

1.6.2. Основные виды алгебраических функций

В зависимости от вида алгебраического выражения, задающего отображения, будем, как принято в математике, различать следующие виды функций.

Функцию, заданную формулой $y=b$, назовем *постоянной.* Ее графиком является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку (O,b) на оси ординат (рис. 1.24, *а*).

Функция, заданная формулой $y=kx$, где $k\neq 0$ (*коэффициент пропорциональности*), называется *прямой пропорциональностью*.

Графиком прямой пропорциональности $y=kx$ является прямая, проходящая через начало координат (рис. 1.24, *б*).

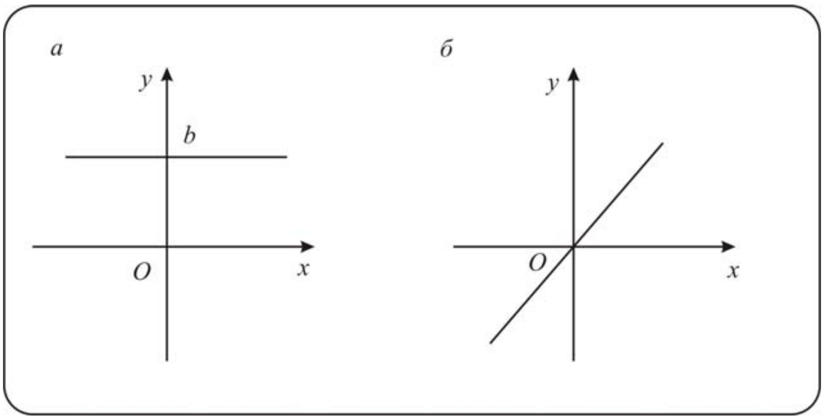


Рис. 1.24. Графики функций:
а – постоянной; *б* – прямо пропорциональной

Отметим ее основные свойства:

– областью определения функции является множество всех действительных чисел, то есть $y\in \mathrm{R}$;

– так как $y=kx=-k(-x)$, то функция является нечетной;

– при $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ убывает на всей числовой оси.

Линейная функция задается формулой $y=kx+b$, где k и b – действительные числа.

Отметим основные ее свойства:

– при $k=0$ линейная функция $y=kx+b$ преобразуется в постоянную $y=b$, а при $b=0$ – в прямую пропорциональность $y=kx$;

– областью определения функции является множество всех действительных чисел, то есть $y \in \mathrm{R}$;

– функция не является ни четной, ни нечетной;

– при $k > 0$ функция возрастает, а при $k < 0$ убывает на всей числовой оси.

Графиком линейной функции $y = kx + b$, показанной на рис. 1.25, *а*, является прямая. Число k, называемое *угловым коэффициентом прямой*, равно тангенсу угла α между прямой и положительным лучом оси x, то есть $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Если функция задана формулой $y = \dfrac{k}{x}$, то ее называют *обратной пропорциональностью*, а число $k \neq 0$ – *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Графики, выражающие данную зависимость, приведены на рис. 1.25, *б* и называются *гиперболой*.

Данная функция характеризуется следующими свойствами.

– областью определения функции является множество всех действительных чисел, то есть $y \in \mathrm{R}$;

– так как $y = \dfrac{k}{x} = -\dfrac{k}{-x}$, то она является нечетной;

– на промежутках $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$ функция при $k > 0$ убывает, а при $k < 0$ возрастает.

Функция $y = x^n$, где n – натуральное число, называется *степенной функцией* с натуральным показателем. При $n = 1, n = 2, n = 3$ степенная функция соответственно принимает следующий вид: $y = x,\ y = x^2,\ y = x^3$.

Свойства функции $y = x$ приведены выше.

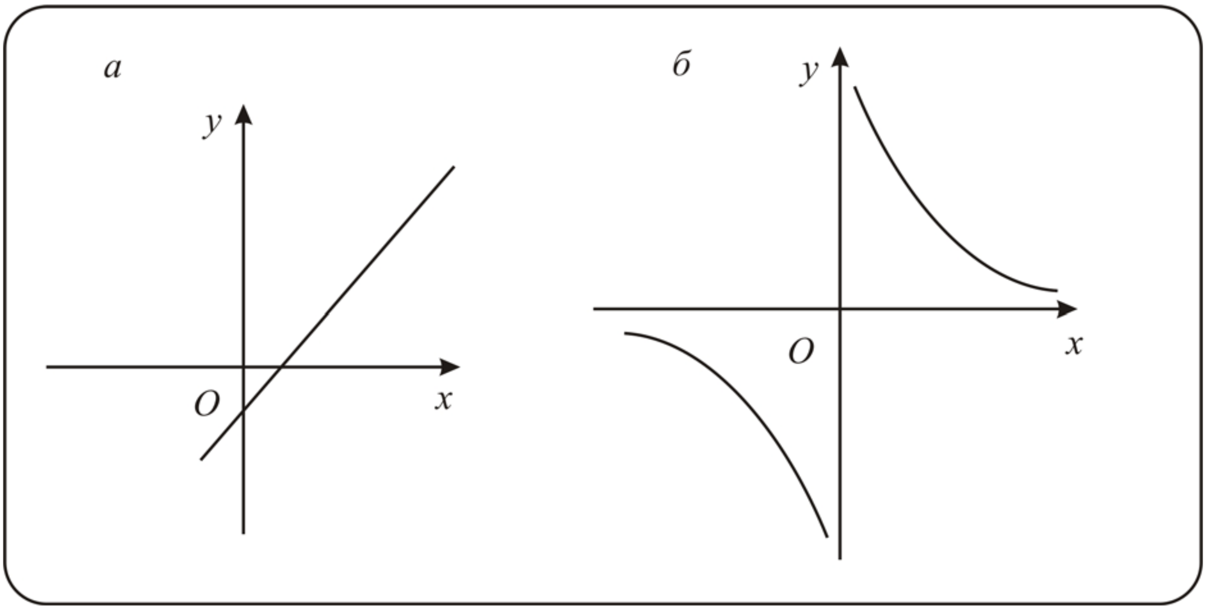


Рис. 1.25. Графики функций:
а – линейной; *б* – обратно пропорциональной

Рассмотрим свойства функции $y = x^2$:

– областью определения функции является множество всех действительных чисел, то есть $y \in \mathrm{R}$;

– так как $y = x^2 = (-x)^2$, то значит, что она четная;

– на промежутке $(0, +\infty)$ функция возрастает, а на промежутке $(-\infty, 0)$ – убывает.

Графиком функции является *парабола* (рис. 1.26, *а*).

Рассмотрим свойства функции $y = x^3$:

– областью ее определения является множество всех действительных чисел, то есть $y \in \mathrm{R}$;

– так как $y = x^3 = -(-x)^3$, то значит, что она нечетная;

– функция возрастает на всей числовой прямой.

Графиком функции $y = x^3$ называется кубическая парабола, показанная на рисунке 1.26, *б*.

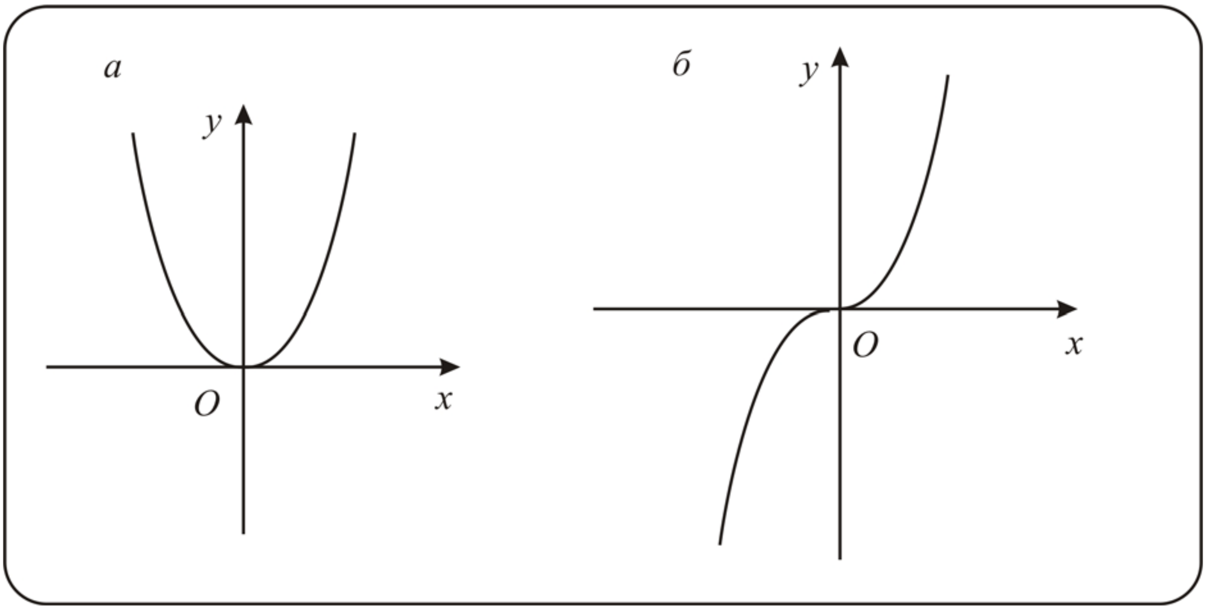


Рис. 1.26. Графики функций:
а – парабола; *б* – кубическая парабола

При четном $n > 2$ функция $y = x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^2$. Графики таких функций напоминают параболу, у которой ветви при $|x| > 1$ с возрастанием n идут вверх круче, чем у функции $y = x^2$. При нечетных значениях n графики функции $y = x^n$ напоминают кубическую параболу, у которой ветви с возрастанием n идут вверх и вниз круче, чем у функции $y = x^2$.

Функция, описываемая формулой $y = x^{-n}$, где n – натуральное число, называется *степенной функцией* с целым отрицательным показателем. При $n = 1$ эта функция является обратной пропорциональностью ($y = \frac{1}{x}$). Ее свойства были рассмотрены выше. При нечетных значениях $n > 1$ графики функции $y = x^{-n}$ напоминают график функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 1.27, *а*). При четных значениях $n > 2$ эта функция обладает следующими свойствами (рис. 1.27, *б*):

– функция определена при всех значениях $x \neq 0$;

– так как при значениях $n = 2, 4, \ldots$ функция $y = x^{-n} = -x^{-n}$, то она является четной;

– на промежутке $(0, +\infty)$ функция убывает, а на промежутке $(-\infty, 0)$ – возрастает.

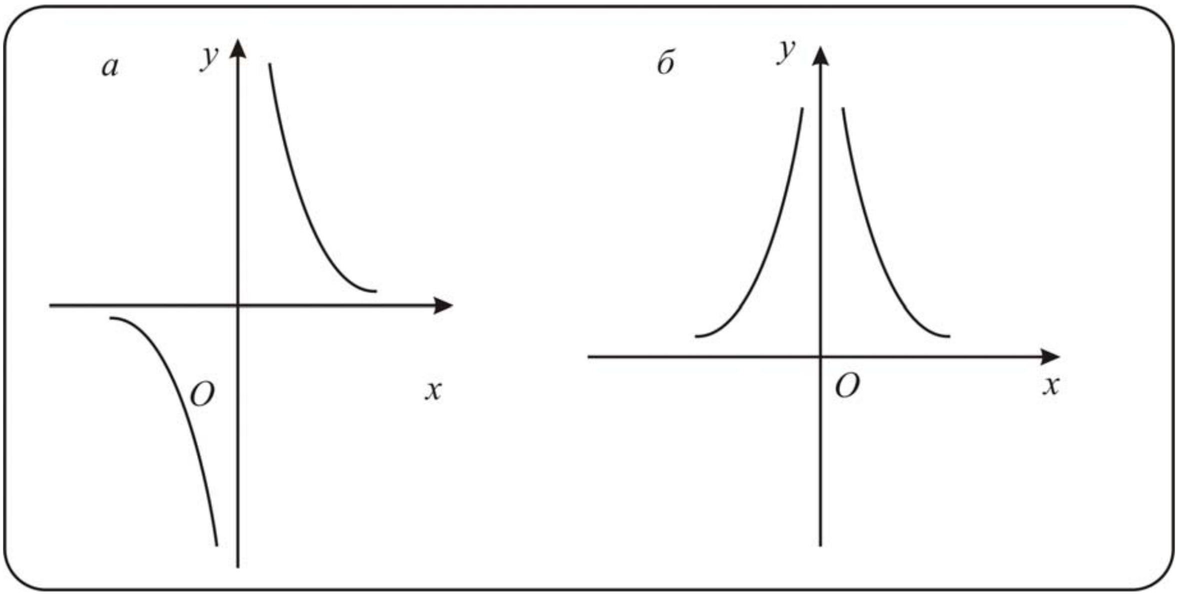


Рис. 1.27. Графики функций:
а – при нечетном n; *б* – при четном n

Функция, задаваемая выражением $y = x^r = x^{\frac{n}{m}}$, где r – положительная несократимая дробь, а n и m – натуральные числа, называется *степенной функцией с положительным дробным показателем*. Обладает следующими свойствами:

- областью определения является луч $[0, +\infty)$;
- функция не является ни четной, ни нечетной;
- в области определения функции возрастает.

Графики функции $y = x^r$ при значениях $r > 1$ и $0 < r < 1$ приведены соответственно на рис. 1.28, *а*, *б*.

Функция, задаваемая выражением $y = x^{-r} = x^{-\frac{n}{m}}$, где r – положительная несократимая дробь, а n и m – натуральные числа, называется *степенной функцией с отрицательным дробным показателем*. График функции $y = x^{-r}$ приведен на рисунке 1.28, *в*.

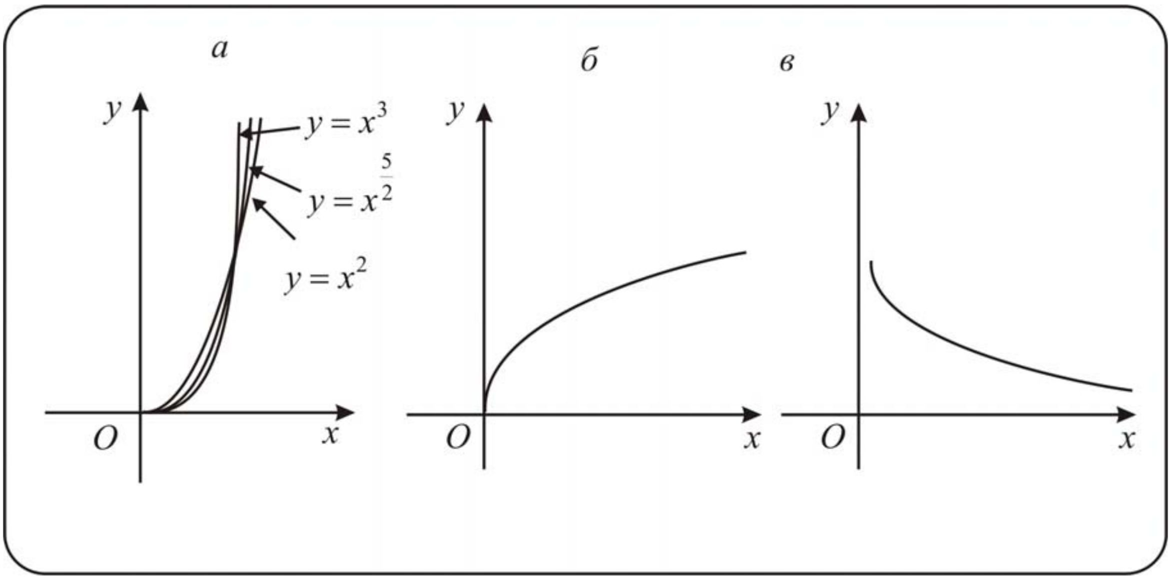


Рис. 1.28. Графики функции $y = x^r$:
а – при $r > 1$; *б* – при $0 < r < 1$; *в* – при $r < 0$

Функция обладает следующими свойствами:

- областью определения является луч $(0, +\infty)$;
- функция не является ни четной, ни нечетной;
- в области определения функции убывает.

Показательная функция задается формулой $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Графики функции $y = a^x$ при $a > 1$ и $0 < a < 1$ приведены соответственно на рис. 1.29, *а*, *б*.

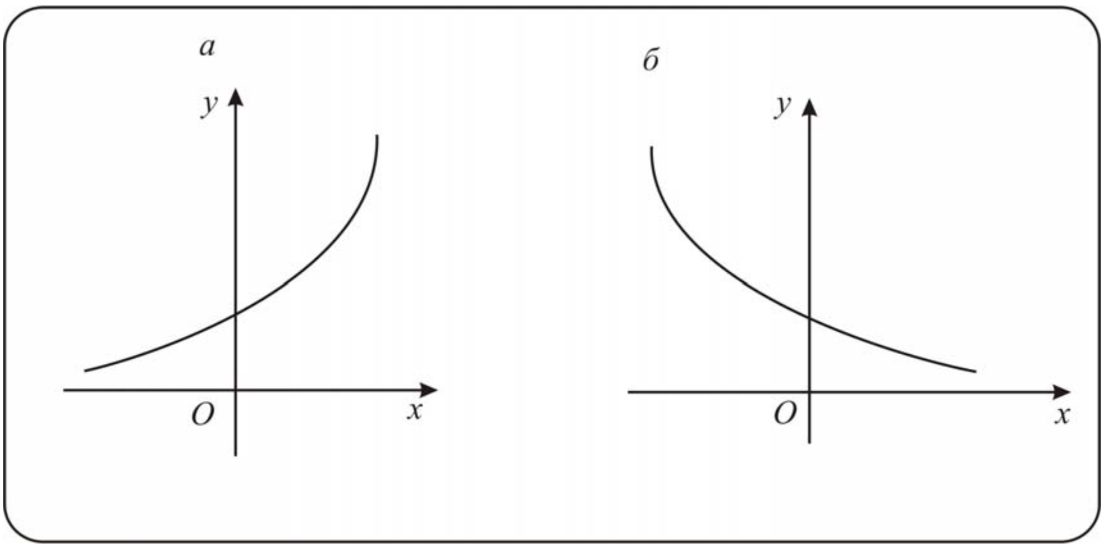


Рис. 1.29. Графики функции $y = a^x$:
а – при $a > 1$; *б* – при $0 < a < 1$

Функция обладает следующими свойствами:
- определена на всей числовой оси;
- областью ее значения является луч $(0, +\infty)$;
- функция не является ни четной, ни нечетной;
- функция возрастает на всей числовой прямой.

Логарифмической называется функция, которая задается выражением $y = \log_a x$, читаемым: «логарифм числа x по основанию a». Она является обратной показательной функцией и поэтому ее график может быть получен из графика функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:
- функция определена на интервале $(0,+\infty)$;
- областью ее значения является вся числовая прямая $(-\infty, +\infty)$;
- функция не является ни четной, ни нечетной;
- функция при $a > 1$ возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает.

1.6.3. Тригонометрические функции

К *тригонометрическим* относят функции, задаваемые математическими выражениями: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Эти функции основываются на геометрических понятиях, отражающих соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике: синус, косинус, тангенс и котангенс угла α.

Под *углом треугольника* (*внутренним углом треугольника*) понимается часть плоскости, ограниченная двумя сторонами треугольника, исходящими из одной точки. За единицу измерения углов принимается *градус*, равный 1/90 части прямого угла. Поскольку сумма внутренних углов треугольника равна 180°, то значения любого из двух острых углов треугольника соответствуют неравенству $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Понимая под *синусом угла* отношение противолежащего катета к гипотенузе, а под *косинусом угла* отношение прилежащего катета к гипотенузе, для угла α треугольника ABC получим следующие выражения (рис. 1.30):

$$\sin\alpha = \frac{AB}{BC},\ \cos\alpha = \frac{AC}{BC}, \tag{1.17}$$

где AB – противолежащий (не принадлежащий углу α) катет;

AC – прилежащий (принадлежащий углу α) катет;
BC – гипотенуза треугольника.

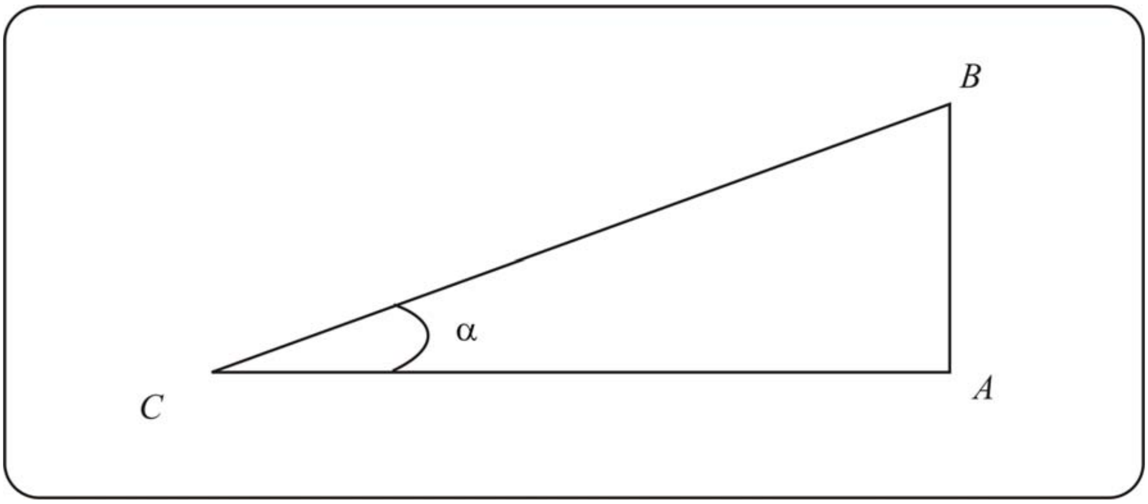


Рис. 1.30. Соотношения между сторонами и углами в треугольнике

Катетом называется сторона треугольника, прилегающая к прямому углу, а *гипотенузой* – сторона треугольника, лежащая против прямого угла.

Тангенсом угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему, а *котангенсом угла* – отношение прилежащего катета к противолежащему. В соответствии с этими определениями получим следующие выражения для вычисления тангенса и котангенса угла α:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{AB}{AC};\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{AC}{AB}. \qquad (1.18)$$

Геометрические понятия – *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс* угла $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ – распространяют в тригонометрии на любой *угол*, под которым понимают меру поворота луча вокруг его начала. Полный поворот луча, когда начальное его положение совпадает с конечным, образует *полный угол*, величина которого составляет 360°.

Для выяснения сущности тригонометрических понятий *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс* произвольного угла возьмем на оси x прямоугольной системы координат xOy отрезок OA длиной, равной единице. При повороте этого отрезка вокруг точки O на 360° его конец A опишет окружность с единичным радиусом и центром в этой точке. Площадь, ограниченная данной окружностью, называется *тригонометрическим кругом* (рис. 1.31).

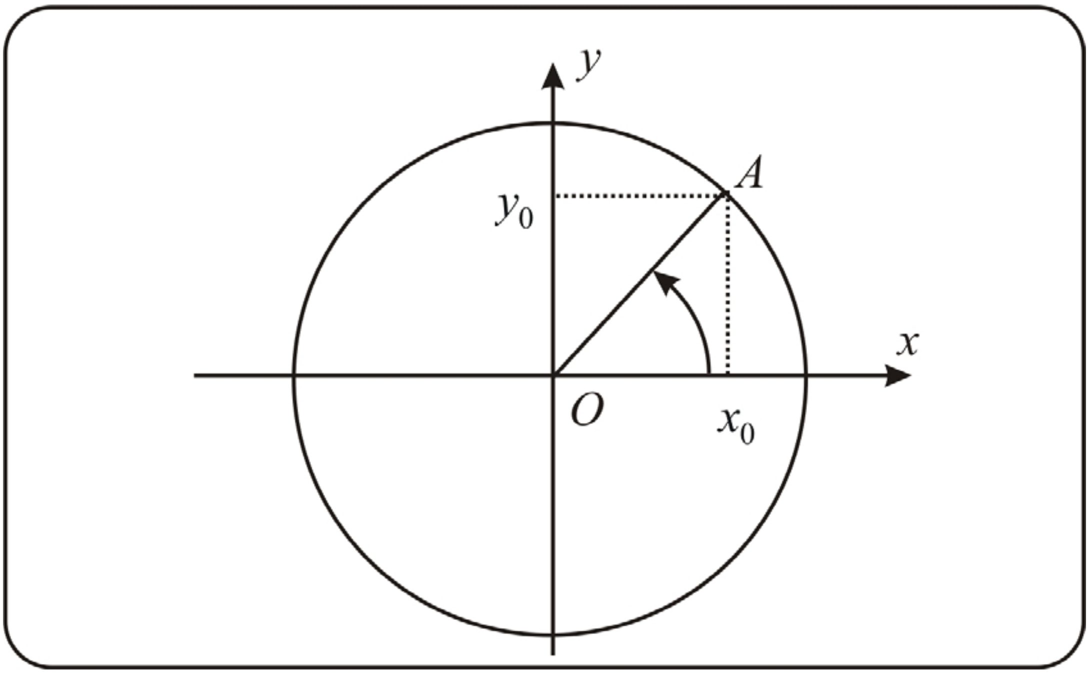


Рис. 1.31. Тригонометрический круг

Опираясь на определения геометрических понятий рассматриваемых величин для угла $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ и обобщая их для произвольного угла α, с помощью тригонометрического круга получим следующие выражения:

$$\sin\alpha = y_0,\ \cos\alpha = x_0,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0}{x_0},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_0}{y_0}, \qquad (1.19)$$

где x_0 и y_0 координаты точки A.

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для часто применяемых углов приведены в табл. 1.1.

Из определений следует, что не существует тангенс углов, косинус которых равен нулю, и котангенс углов, синус которых равен нулю. Поэтому в соответствующих позициях табл. 1.1 при таких значениях углов поставлен знак «–».

На практике угол поворота чаще измеряется не в градусах, а в радианах. Под *радианом* понимают величину центрального угла, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу R окружности. Так как длина окружности равна $2\pi R$, то полный угол содержит 2π радиан. Учитывая, что полный угол составляет 360°, то в одном радиане содержится $\frac{360}{2\pi} \approx 57^\circ$.

Таблица 1.1

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для часто применяемых углов

Функция	Аргумент α, в градусах						
	0	30	45	60	90	180	270
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Радиальная мера угла позволяет находить геометрические величины от переменной x, значения которой выражены действительным числом, то есть переходить к тригонометрическим функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Например, $\sin 4 \approx \sin(4 \cdot 57) = \sin 228^\circ$.

Графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ изображены соответственно на рис. 1.32 – 1.35.

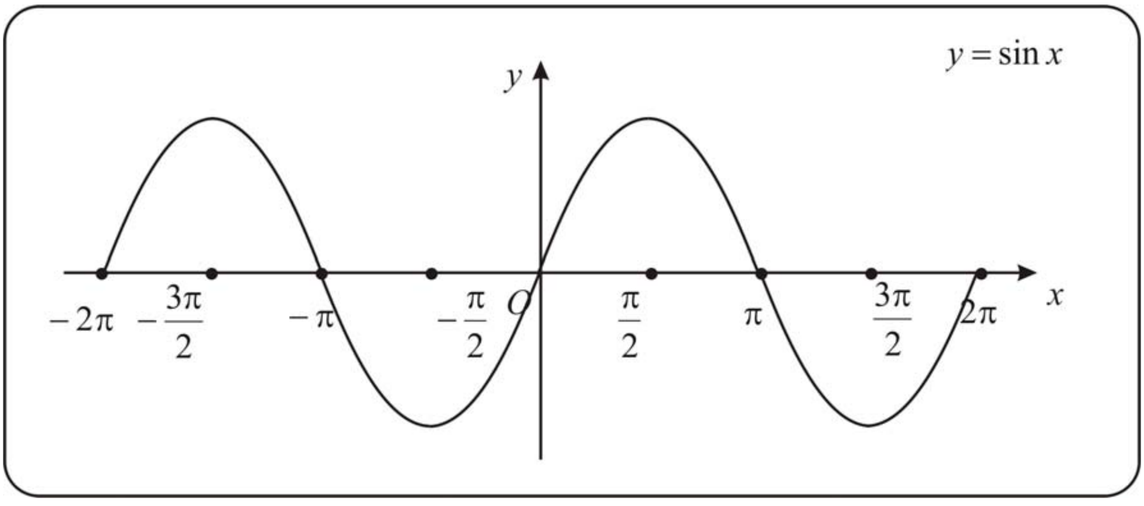


Рис. 1.32. График функции $y = \sin x$

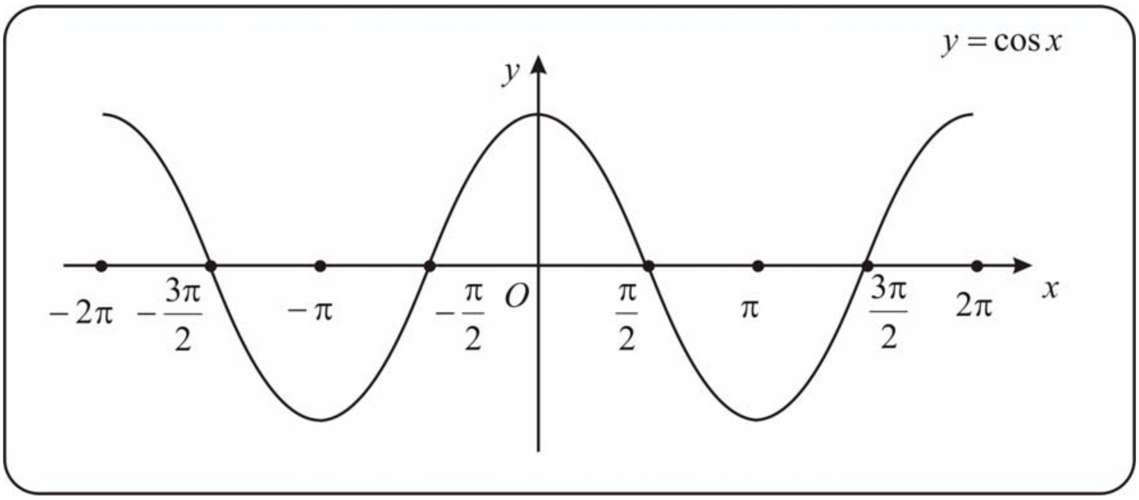


Рис. 1.33. График функции $y = \cos x$

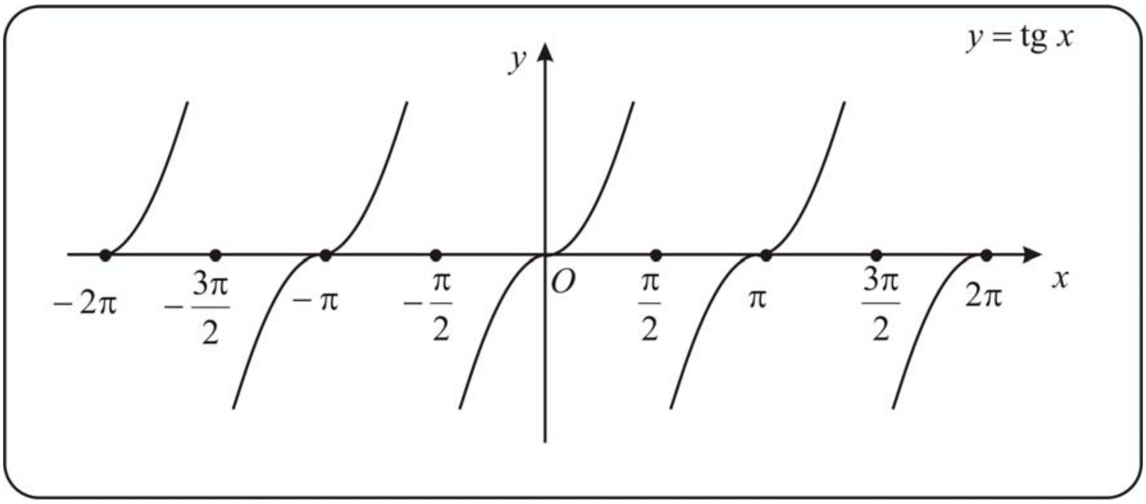


Рис. 1.34. График функции $y = \mathrm{tg}\ x$

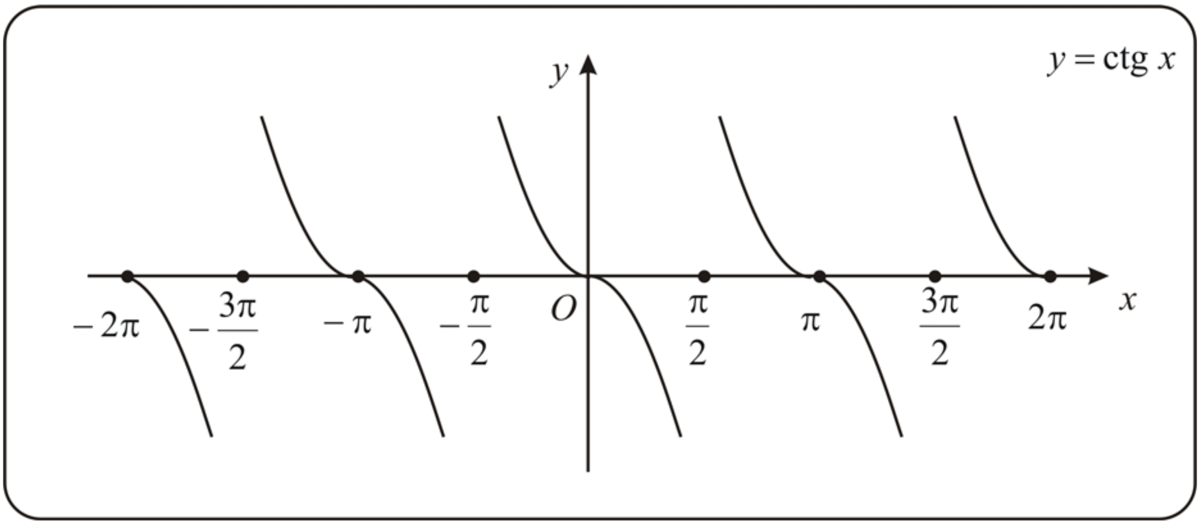


Рис. 1.35. График функции $y = \mathrm{ctg}\ x$

Из определений тригонометрических функций следует, что знак $\sin x$ совпадает со знаком ординаты y_0, а знак $\cos x$ – со знаком абсциссы x_0 точки A (рис. 1.36).

Применение тригонометрического круга позволяет определить следующие свойства тригонометрических функций:

$$\cos(-x) = \cos x; \tag{1.20}$$

$$\sin(-x) = -\sin x; \tag{1.21}$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \tag{1.22}$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x; \tag{1.23}$$

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x; \tag{1.24}$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x; \tag{1.25}$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x; \tag{1.26}$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x; \tag{1.27}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta; \tag{1.28}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta; \tag{1.29}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta; \tag{1.30}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta; \tag{1.31}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}; \tag{1.32}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}; \tag{1.33}$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1; \tag{1.34}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \tag{1.35}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \tag{1.36}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \tag{1.37}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{1.38}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1; \tag{1.39}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha; \tag{1.40}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \tag{1.41}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}; \tag{1.42}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{1.43}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \tag{1.44}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{1.45}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{1.46}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}; \quad (1.47)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}. \quad (1.48)$$

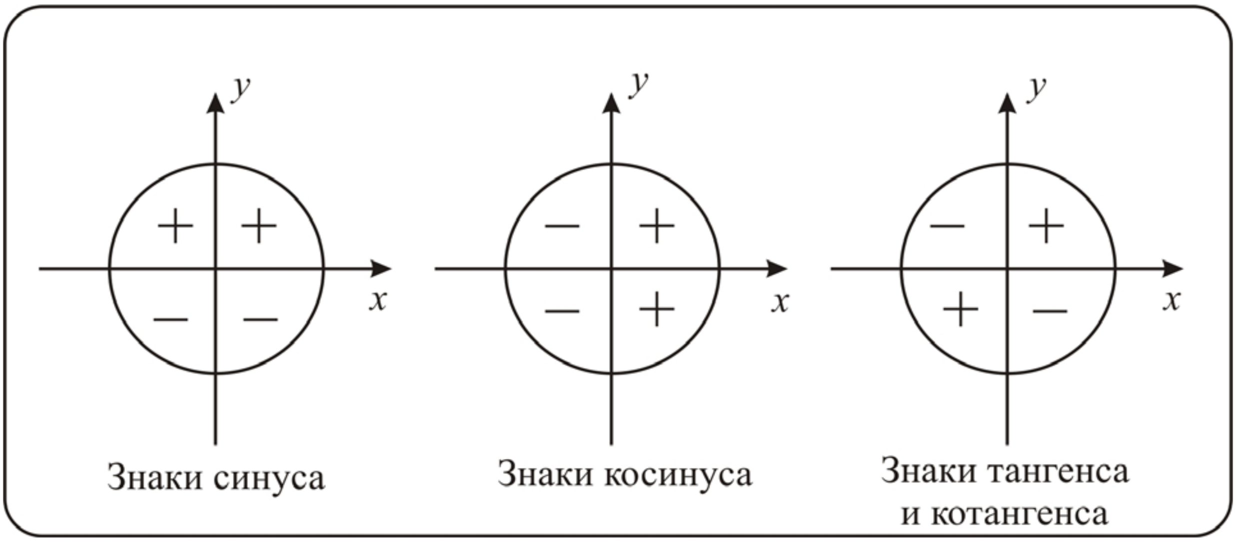


Рис. 1.36. Знаки тригонометрических функций

1.6.4. Деформация графиков функций

На практике для облегчения исследования функций $f(x)+b$, $f(x+a)$, $cf(x)$, $f(kx)$, где a, b, c и k – действительные числа, применяют определенные приемы (способы), позволяющие построить их графики по известному графику функции $f(x)$. Рассмотрим эти способы.

1. Для построения графика функции $f(x)+b$ достаточно сместить график функции $f(x)$ в вертикальном направлении на $|b|$ единиц масштаба вверх при $b>0$ или вниз при $b<0$. Другими словами (что то же самое), оставляя график функции $f(x)$ на месте, достаточно сместить ось Ox в вертикальном направлении на $|b|$ единиц масштаба вниз при $b>0$ или вверх при $b<0$.

Действительно, сложив графики функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = b$, получим график функции $f(x)+b$.

2. Для построения графика функции $f(x+a)$ можно сместить график функции $f(x)$ в горизонтальном направлении на $|a|$ единиц масштаба вправо при $a<0$ или влево при $a>0$. Другими словами, оставляя график функции $f(x)$ на месте, можно сместить координатную ось Oy по горизонтали на $|a|$ единиц масштаба влево при $a<0$ или вправо при $a>0$.

Это объясняется тем, что функция $f(x+a)$ в точке $x-a$ принимает такое же значение, как и функция $f(x)$ в точке x.

3. Для построения графика функции $cf(x)$ нужно деформировать график функции $f(x)$ в c раз вдоль оси Oy, то есть сжать его при $0<c<1$ или растянуть при $c>1$. Другими словами, оставляя график функции $f(x)$ без изменения, нужно изменить в c раз масштаб по оси Oy, а именно уменьшить его при $c>1$ или увеличить при $0<c<1$.

Возможность такого построения доказывается следующим. Поскольку для каждого x из области определения функции $f(x)$ значение этой функции умножается на одно и то же число c, то при $0<c<1$ эта операция геометрически представляет собой сжатие графика функции $f(x)$, а при $c>1$ – его растяжение в вертикальном направлении.

Отметим, что при $c<0$ необходимо сначала построить график функции $-f(x)$, симметричный графику функции $f(x)$ относительно оси Ox.

4. Для построения графика функции $f(kx)$ следует деформировать график функции $f(x)$ в k раз вдоль оси Ox, то есть сжать его при $k>1$ или растянуть при $k<1$. Другими словами, не изменяя графика функции $f(x)$, следует изменить в k раз масштаб по оси Ox, то есть уменьшить его при $k<1$ или увеличить при $k>1$.

Справедливость такой деформации подтверждается тем, что функция $f(kx)$ в точке $\dfrac{x}{k}$ имеет такое же значение, как и функция $f(x)$ в точке x.

1.7. Понятия функционала и оператора

1.7.1. Функционал

Говоря об отображении $f: X \to Y$ как о функции с вещественными значениями, мы не накладывали на характер элементов рассматриваемых множеств каких-либо особых ограничений. В простейших задачах множество X, как и множество Y, представляет собой множество вещественных чисел. Каждая пара $(x, y) \in f$ ставит в соответствие одному вещественному числу x другое вещественное число y. Однако важным для практики электроснабжения является случай, когда множество X представляет собой множество функций, а множество Y – множество вещественных чисел. Этот случай приводит к понятию *функционал*. Итак, под *функционалом* понимают однозначное отображение произвольного множества функций в числовое множество и обозначают $J: F(x) \to T$, где $J \subseteq F(x) \times T$.

Примером функционала служат операторы интегрирования, в частности, оператор определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ставящий в соответствие каждой функции $f(x) \in F(x)$ определенное число $t \in T$, что может быть записано в виде $t = J[f(x)]$.

1.7.2. Оператор

Оператором L называют отображение $L: X \to Y$, в котором множества X и Y являются множествами функций с элементами $x(t)$ и $y(t)$, а элементами множества L будут пары $(x(t), y(t))$.

В этом случае говорят, что оператор L, обозначаемый $y(t) = L[x(t)]$, преобразует функцию $x(t)$ в функцию $y(t)$.

Примером оператора служит оператор дифференцирования, преобразующий по определенному закону L каждую функцию $f(x) \in X$ в другую $-f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \in Y$, что может быть записано в виде $f'(x) = L[f(x)]$.

Символическое изображение $\dot{S}_m = S_m e^{j\varphi}$ (комплексная амплитуда) косинусоидальной функции $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ получается в результате применения оператора $\dot{S}_m = \frac{2}{T}\int\limits_0^T s(t)\, e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$, где $T = 2\pi/\omega$, что может быть записано в виде $\dot{S}_m = L[s(t)]$.

Поскольку при этом между косинусоидальной функцией $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ и ее символическим изображением $\dot{S}_m = S_m e^{j\varphi}$ существует взаимно однозначное соответствие, то по заданной функции можно найти символическое изображение и, наоборот, по известному символическому изображению косинусоидальной функции находятся ее параметры S_m и φ.

Другие виды операторов будут рассмотрены ниже, в соответствующих разделах данного пособия.

1.8. Отображения, заданные на одном множестве

Важным частным случаем отображения является случай, когда множества X и Y совпадают, то есть $X = Y$. При этом отображение $\Gamma : X \to Y$ будет представлять собой отображение множества X самого в себя и определяться парой (X, Γ), где $\Gamma \subseteq X \times X = X^2$.

Для обозначения некоторых видов отображений, заданных на одном и том же множестве, часто используют некоторые специальные названия, такие, как отношения, граф, операция и действие, смысл которых будет раскрыт нами в дальнейшем.

1.8.1. Понятие отношения

Рассмотрим множество X, элементами которого могут быть объекты любой природы, например, числа, подмножества универсального множества и т. д.

Элементы этого множества каким-либо образом могут сопоставляться друг с другом, образуя упорядоченный набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из n элементов. Совокупность φ упорядоченных наборов из n элементов данного множества называется *отношением*. Про элементы, входящие в один набор, говорят, что они находятся в отношении φ между собой и обозначают это формулой $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Если элементы a и b множества X при сопоставлении друг с другом образуют пары $(a,b) \in \Gamma$, где $\Gamma \subseteq X^2$, то такое отношение называется *бинарным*. При этом говорят, что элемент $b \in X$ находится в отношении Γ к элементу $a \in X$ и записывают это в виде $b\Gamma a$, а пару множеств (X, Γ), где $\Gamma \subseteq X^2$, как и множество Γ, называют *бинарным отношением*.

Различают рефлексивное, антирефлексивное, симметричное, антисимметричное, несимметричное и транзитивное бинарные отношения.

Рефлексивное отношение – это такое бинарное отношение Γ в множестве X, что для всех элементов $a \in X$ отношение $a\Gamma a$ верно.

Антирефлексивным отношением называется такое бинарное отношение Γ в множестве X, что для всех элементов $a \in X$ этого множества отношение $a\Gamma a$ является ложным.

Симметричное отношение – это такое бинарное отношение Γ в множестве X, что для всех элементов $a, b \in X$ справедливо выражение $a\Gamma b \to b\Gamma a$.

Антисимметричное отношение является таким бинарным отношением Γ в множестве X, что для всех элементов $a, b \in X$ из истинности отношений $a\Gamma b$ и $b\Gamma a$ следует равенство $a = b$.

Несимметричное отношение – это такое бинарное отношение Γ в множестве X, что для всех элементов $a, b \in X$, если отношение $a\Gamma b$ истинно, то отношение $b\Gamma a$ ложно.

Транзитивное отношение – это такое бинарное отношение Γ в множестве X, что для всех элементов $a, b, c \in X$ из справедливости отношений $a\Gamma b$ и $b\Gamma c$ следует справедливость отношения $a\Gamma c$.

Отношения делятся на различные виды в зависимости от комбинации свойств, которыми они обладают. При этом будем выделять следующие свойства бинарных отношений:

- рефлексивность (утверждение $a\Gamma a$ истинно);
- антирефлексивность (утверждение $a\Gamma a$ ложно);
- симметричность (справедливо утверждение, что если элемент $a \in X$ находится в отношении Γ к элементу $b \in X$, то и элемент $b \in X$ находится в отношении Γ к элементу $a \in A$, то есть $a\Gamma b \to b\Gamma a$);

– антисимметричность (если утверждения $a\Gamma b$ и $b\Gamma a$ истинны, то справедливо равенство $a = b$);

– несимметричность (если утверждение $a\Gamma b$ истинно, то утверждение $b\Gamma a$ ложно);

– транзитивность (из справедливости утверждений $a\Gamma b$ и $b\Gamma c$ следует справедливость утверждения $a\Gamma c$).

При описании этих свойств будем принимать, что a, b и c – любые элементы из множества X, то есть $a, b, c \in X$.

Опираясь на совокупность этих свойств, рассмотрим некоторые наиболее важные виды отношений.

Отношения толерантности и эквивалентности. *Толерантностью* называется бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности и симметричности.

Говорят, что элементы множества находятся в отношении *эквивалентности*, когда любой из этих элементов при некотором рассмотрении может быть заменен другим. Для обозначения эквивалентности будем использовать символ ≡ или ~. Для отдельных частных отношений эквивалентности будем применять следующие символы: = – для обозначения равенства, $\mid\mid$ – параллельности, $\Leftrightarrow$ – логической эквивалентности.

Отношение эквивалентности обладает следующими тремя свойствами:

– рефлексивностью: $a \equiv a$;

– симметричностью: $a \equiv b \to b \equiv a$;

– транзитивностью: $a \equiv b$ и $b \equiv c \to a \equiv c$.

Таким образом, отношение Г называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Другими словами, эквивалентность есть толерантность, обладающая транзитивностью.

Отношение порядка. Отношение, которое определяет некоторый порядок расположения элементов множества (например, раньше или позже, больше или меньше, множество или подмножество и т. д.), называют *отношением порядка*. Различают отношение нестрогого порядка (для него используются символы ≤ или ≥) и отношение строгого порядка (для него используются символы < или >).

Отношение нестрогого порядка обладает свойствами:

– рефлексивностью: $a \le a$;

– антисимметричностью: $a \le b$ и $b \le a \to a = b$;

– транзитивностью: $a \le b$ и $b \le c \to a \le c$.

Таким образом, отношение Γ называется *отношением нестрогого порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение строгого порядка обладает свойствами:

– антирефлексивностью: утверждение $a < a$ ложно;

– несимметричностью: утверждения $a < b$ и $b < a$ взаимоисключаются;

– транзитивностью: $a < b$ и $b < c \to a < c$.

Таким образом, отношение Γ называется *отношением строгого порядка*, если оно антирефлексивно, несимметрично и транзитивно.

Множество X называется *упорядоченным*, если любые два элемента (a и b) этого множества являются сравнимыми: $a < b$, $a = b$ или $b < a$.

Отношение доминирования. В тех случаях, когда элемент a множества X превосходит в чем-то элемент b этого множества, то говорят, что элемент $a \in X$ доминирует над элементом $b \in X$ или элемент a находится в *отношении доминирования* с элементом b, и записывают $a >> b$.

Отношение доминирования обладает следующими свойствами:

– антирефлексивностью: утверждение $a >> a$ ложно;

– несимметричностью: утверждения $a >> b$ и $b >> a$ взаимоисключаются.

Заметим, что в отношении доминирования свойство транзитивности не имеет места. Таким образом, отношение Γ называется *отношением доминирования*, если оно антирефлексивно и несимметрично.

1.8.2. Понятие графа

Граф G есть пара (X, U), состоящая из множества X и отображения U, заданного на этом множестве: $G = (X, U)$.

Наглядное представление о графе можно получить, если представить себе некоторое множество X точек плоскости x_i, называемых *вершинами*, и множество U направленных отрезков $u = (x_i, x_j)$, соединяющих все или некоторые из вершин и называемых дугами [3].

На рисунке 1.37 изображен граф, вершинами которого являются точки $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, а дугами – отрезки $(x_1, x_2), (x_3, x_2)$, $(x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_3), (x_4, x_4), (x_5, x_4), (x_6, x_7)$.

Подграфом G_A графа $G = (X, U)$ называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G, образующих множество A, вместе с дугами, соединяющими эти вершины. На рисунке 1.37 подграф G_A изображен в области, очерченной пунктиром.

Математически граф можно записать в следующем виде:

$$G_A = (A, U_A),\ A \subseteq X,\ U_A x = (Ux) \bigcap A. \qquad (1.49)$$

Частичным графом G_Δ по отношению к графу $G = (X, U)$ называется граф, содержащий только часть дуг графа G, то есть определяется условием $G_\Delta = (X, \Delta)$, где $\Delta x \subseteq Ux$. Граф, изображенный на рис. 1.37 жирными дугами, является частичным графом.

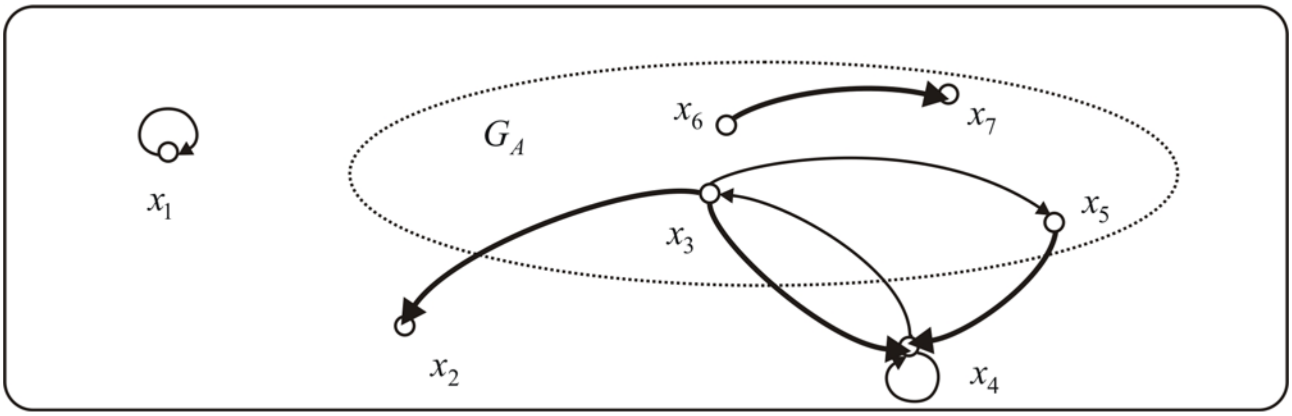


Рис. 1.37. Общий вид графа

Для описания различных графов применяют понятия «*путь»* и «*контур»*.

Путем в графе $G = (X, U)$ называют такую последовательность дуг $\pi = (u_1, \cdots, u_k)$, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь, последовательными вершинами которого являются вершины $x_1, x_2, \cdots, x_n$, обозначают также в виде $\pi = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Длиной пути $\pi = (u_1, \cdots, u_k)$ называют число $l(\pi) = k$, равное числу дуг, составляющих путь. Иногда каждой дуге u_i приписывают некоторое число $l(u_i)$, называемое *длиной дуги*. Тогда *длина пути* определяется как сумма длин дуг, составляющих путь: $l(\pi) = \sum\limits_{u_i \in \pi} l(u_i)$.

Путь, в котором никакая дуга не встречается дважды, называется *простым* [3]. Путь, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется *элементарным*.

Контур – это конечный путь $\pi=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, у которого начальная вершина x_1 совпадает с конечной x_k. При этом контур называется *элементарным*, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной точек, которые совпадают). Контур единичной длины, образованный дугой вида (x_i, x_i), называется *петлей*.

Так, на рис. 1.37 множество (x_5, x_4, x_3, x_2) – путь, (x_3, x_5, x_4, x_3) – контур, (x_4, x_4) – петля.

Иногда удобно представлять графы в виде некоторых матриц, в частности, в виде матриц смежности и инциденций.

Матрицей смежности графа называется квадратичная матрица $R=\lfloor r_{ij} \rfloor$ порядка $n \times n$, элементы r_{ij} которой имеют значения:

$$r_{ij}=\begin{cases}1, \text{если имеется дуга, соединяющая вершину } i \text{ с вершиной } j;\\ 0, \text{если такой дуги нет.}\end{cases}$$

При этом вершины x_i и x_j называют *смежными*, если они различны и существует дуга, соединяющая их.

Матрицей инциденций для дуг графа называется матрица $S=[s_{ij}]$ порядка $n \times m$, элементы s_{ij} которой принимают следующие значения:

$$s_{ij}=\begin{cases}+1, \text{если дуга } u_i \text{ исходит из вершины } x_i;\\ -1, \text{если дуга } u_i \text{ заходит в вершину } x_i;\\ 0, \text{если дуга } u_i \text{ не инцидентна вершине } x_i.\end{cases}$$

При этом дугу u_{ij} называют *инцидентной* вершине x_i, если она заходит в эту вершину или исходит из нее.

Иногда граф рассматривают без учета ориентации дуг, тогда его называют *неориентированным графом*. Для неориентированного графа понятия «*дуга*», «*путь*» и «*контур*» заменяются понятиями «*ребро*», «*цепь*», «*цикл*».

Таким образом, данным понятиям можно дать следующие определения:

ребро – это отрезок, соединяющий две вершины;

цепь – последовательность ребер;

цикл – цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают.

В неориентированном графе вершины x_i и x_j называют *смежными*, если существует соединяющее их ребро, а само ребро называется *инцидентным* вершинам x_i и x_j. С понятием *неориентированный граф* связаны такие понятия, как *связность графа* и *дерево*. Говорят, что граф *связан*, если любые две его вершины можно соединить цепью. *Деревом* называют конечный связный неориентированный граф, не имеющий циклов (рис. 1.38).

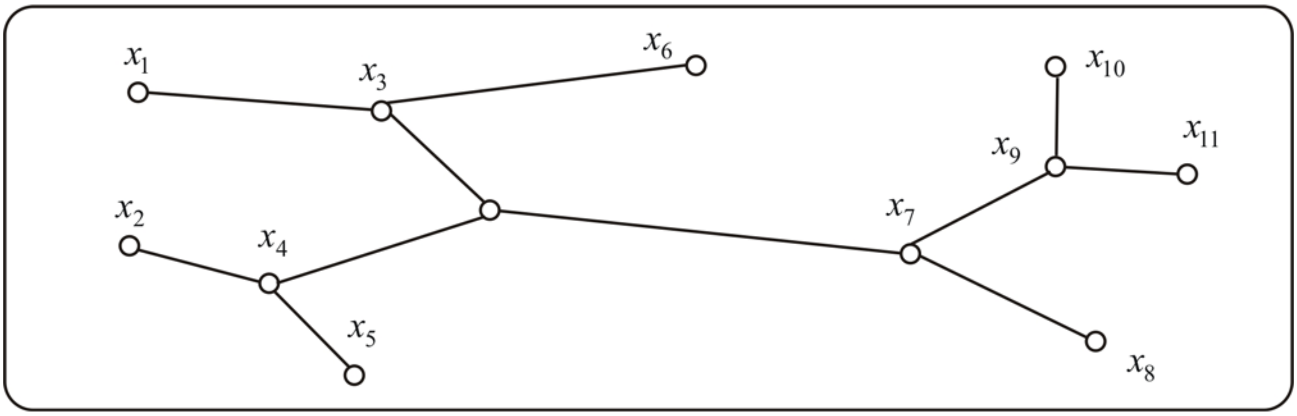


Рис. 1.38. Неориентированный граф – дерево

1.8.3. Операции – законы композиции

На практике обычно используют множества, над элементами которых могут быть *выполнены определенные операции*, или, как говорят, на которых *заданы внутренние законы композиции*.

На множестве E задан внутренний закон композиции τ, если каждым двум элементам $a, b \in E$ поставлен в соответствие элемент $c \in E$, называемый *композицией* этих элементов и обозначаемый $c = a \tau b$ [5]. Иначе говоря, *внутренним бинарным законом композиции* τ *на множестве* E (*операцией*) называется отображение множества $E \times E$ в множество E.

В общем случае, под *операцией* или n-арной операцией (*алгебраической операцией*) понимают отображение, сопоставляющее упорядоченному набору n элементов данного множества определенный элемент этого же множества (число n фиксировано для данной операции). При $n = 2$ алгебраическая операция называется *бинарной*.

1.8.4. Арифметические и алгебраические действия

На множестве действительных и комплексных чисел различаются следующие операции: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование.

При этом одна из этих семи операций называется *алгебраическим действием*, а одна из четырех операций над числами (сложение, вычитание, умножение, деление) – *арифметическим*.

Сложение – это операция, обозначаемая выражением $a+b$ и позволяющая для любой пары чисел a и b определить по определенному закону единственное число c, называемое их *суммой*. Сами числа a и b называются *слагаемыми*.

Вычитанием называется операция, обратная сложению, позволяющая по сумме и одному из слагаемых находить другое слагаемое. Так, если $a+b=c$, то $a=c-b$ и $b=c-a$. Число, которое вычитается из другого, называется *вычитаемым*, а число, из которого вычитается другое, – *уменьшаемым*.

Умножение – это бинарная операция над числами, позволяющая для любой пары чисел a и b определить по определенному закону единственное число c, называемое *произведением*. Первое число называют *множимым*, а второе – *множителем*. Множимое и множитель называют *сомножителями*. Эта бинарная операция обозначается знаками « $\cdot$ », «×» или постановкой сомножителей рядом без знака между ними.

Деление – это действие, обратное умножению, позволяющее находить по данному произведению и одному из сомножителей другой сомножитель. Оно обозначается знаком «:», а также косой или горизонтальной чертой. Так, если $a \cdot b = c$ и $b \neq 0$, то $a = c : b$. Число, которое делят на другое число, называют *делимым*, а число, на которое делят другое число, – *делителем*.

Возведением в степень называют бинарную операцию, позволяющую находить *степень* $c = a^b$ по заданному *основанию* a и *показателю* степени b.

Извлечение корня – алгебраическое действие, обратное действию возведения в степень, когда по данной степени и показателю степени ищется основание степени. Это действие обозначается знаком радикала $\sqrt{\ }$. Так, если $c = a^b$, то $a = \sqrt[b]{c}$.

Логарифмирование – это действие отыскания логарифма по данному числу и основанию логарифма. *Логарифмом* числа c по основанию a называется показатель степени b, в которую надо возвести число a, чтобы получить число c. Логарифм обозначается символом $\log_a c$. Согласно определению, если $b = \log_a c$, то $c = a^b$. Логарифм по основанию 10 называется *десятичным*, а по основанию e – натуральным. Они обозначаются соответственно через $\lg c$ и $\ln c$. Из определения логарифма вытекают следующие важные равенства:

$$\log_a 1 = 0; \tag{1.50}$$

$$\log_a a = 1; \tag{1.51}$$

$$\log_a c_1 c_2 = \log_a c_1 + \log_a c_2; \tag{1.52}$$

$$\log_a \frac{c_1}{c_2} = \log_a c_1 - \log_a c_2; \tag{1.53}$$

$$\log_a c^r = r \log_a c; \tag{1.54}$$

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}; \tag{1.55}$$

$$\lg c = \frac{1}{\ln 10} \ln c; \tag{1.56}$$

$$\ln c = \frac{1}{\lg e} \lg c. \tag{1.57}$$

Определив алгебраические действия, рассмотрим их основные свойства, называемые *законами алгебры*.

Сумма $a + b$ и произведение ab двух чисел a и b обладают следующими свойствами:

- коммутативным, или переместительным: $a + b = b + a$;
- ассоциативным, или сочетательным: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- дистрибутивным, или распределительным: $(a + b)c = ac + bc$.

Заметим, что в ассоциативном и коммутативном законах сложение можно заменить умножением. При этом получим другой закон, который будет также справедлив, как и первый. Однако в дистрибутивном законе подобной симметрии нет. Если в этом законе заменить сложение умножением, а умножение сложением, то придем к абсурду: $(ab)+c=(a+c)(b+c)$.

Важные свойства действий сложения и умножения проявляются в существовании двух замечательных чисел: 0 и 1, таких, что прибавление первого и умножение на второе не меняют ни одного числа: $a+0=a$, $a\cdot 1=a$.

Заметим, что второе соотношение получается из первого заменой знака $(+)$ на $(\cdot)$ и знака 0 на 1.

Однако здесь сходство между действиями сложения и умножения не всегда проявляется. Так, число 0 играет несколько особую роль по сравнению со всеми другими числами, в том числе и с единицей. Эта особая роль числа 0 вытекает из соотношения $a\cdot 0=0$. Если в этом выражении заменить символ $(\cdot)$ на $(+)$ и знак 0 на 1, то придем к соотношению $a+1=1$, которое никогда не будет верным.

1.8.5. Операции над множествами

На множестве $P(Y)$ всех подмножеств некоторого множества Y бинарными законами композиции (операциями) являются операции объединения, пересечения, разности множеств, дополнения, разбиения множеств, а также прямого произведения множеств.

Объединением множеств A и B, обозначаемым $A\bigcup B$, называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B: $A\bigcup B=\{\, a \mid a\in A \text{ или } \mathrm{a}\in \mathrm{B} \,\}$.

Используя круги Эйлера, условно изображающие множества, наглядно проиллюстрируем свойства операции объединения множеств, для чего рассмотрим два круга (рис. 1.39).

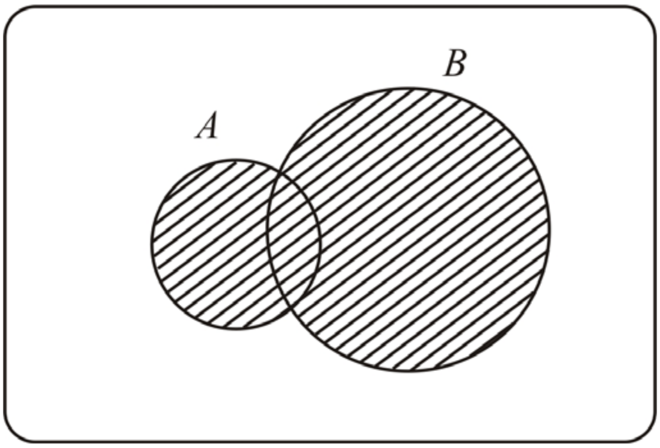


Рис. 1.39. Объединение множеств

Если A – множество точек левого круга, а B – множество точек правого, то объединение множеств $A \bigcup B$ представляет собой заштрихованную область, ограниченную обоими кругами.

Объединение множеств иногда называют суммой множеств и обозначают $A + B$.

Заметим, что свойство объединения множеств отличается от свойств суммы при обычном арифметическом понимании, поэтому этот термин использоваться нами не будет.

Понятие *объединение* можно распространить и на большее число множеств.

Обозначим через $X = \{X_1, \dots X_n\}$ совокупность n множеств $X_1, \dots X_n$, называемую иногда *системой множеств*.

Объединение этих множеств (обозначаемое в одном из видов: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, $\bigcup\limits_{X_i \in X} X_i$ или $X_1 \bigcup \dots \bigcup X_n$) представляет собой множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств системы X.

Для объединения множеств справедливы следующие свойства:

- коммутативное: $A \bigcup B = B \bigcup A$;
- ассоциативное: $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$;
- аналогичное свойству сложения с нулем ($a + 0 = a$) в обычной алгебре: $A \bigcup \varnothing = A$.

Пересечением множеств A и B, обозначаемым символом $A \bigcap B$, называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B: $A \bigcap B = \left\{ a \mid a \in A \text{ и } a \in \text{B} \right\}$.

Используя круги Эйлера, наглядно проиллюстрируем свойства операции пересечения множеств. Для этого рассмотрим два круга, приведенных на рис. 1.40.

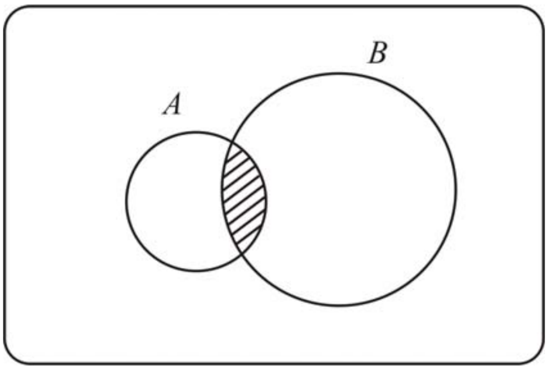


Рис. 1.40. Пересечение множеств

Если A – множество точек левого круга, а B – правого, то пересечение множеств $A \bigcap B$ представляет собой заштрихованную область, являющуюся общей частью обоих кругов.

Пересечение множеств иногда называют произведением и обозначают AB. Однако свойства пересечения множеств несколько отличаются от свойств произведения в обычном арифметическом понимании, поэтому в данном учебном пособии этот термин использоваться не будет.

Операция пересечения множеств позволяет определить некоторые важные понятия:

– множества A и B называются *непересекающимися*, если они не имеют общих элементов: $A \bigcap B = \varnothing$;

– множества A и B *находятся в общем положении*, если выполняются три условия: существует элемент множества A, не принадлежащий множеству B; существует элемент множества B, не принадлежащий множеству A; существует элемент, принадлежащий как множеству A, так и множеству B.

Понятие «*пересечение*» можно рассматривать и на большее число множеств. При этом пересечение множеств $X = \left\{ X_1, \dots X_n \right\}$ (обозначаемое в одном из видов: $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$, $\bigcap\limits_{X_i \in X} X_i$, $X_1 \bigcap \ldots \bigcap X_n$) представляет собой множество, элементы которого принадлежат каждому из множеств системы X.

Нетрудно заметить, что пересечение множеств обладает следующими свойствами:

- коммутативным: $A \bigcap B = B \bigcap A$;
- ассоциативным: $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$;
- аналогичным свойству умножения на ноль ($a \cdot 0 = 0$) в обычной алгебре: $A \bigcap \varnothing = \varnothing$.

Отметим одно из отличий алгебры множеств от алгебры чисел.

Если a и b – два числа, то между ними могут быть три соотношения: $a < b$, $a = b$, $a > b$, а между множествами A и B может быть одно из пяти отношений: $A = B$; $A \subset B$; $A \supset B$; $A \bigcap B = \varnothing$; множества A и B находятся в общем положении.

Разностью множеств A и B, обозначаемой символом $A \setminus B$, называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B: $A \setminus B = \left\{ c \,\middle|\, c \in A \text{ и } c \notin B \right\}$.

В отличие от операций объединения и пересечения, разность определяется только для двух множеств. На рисунке 1.41 разность множеств показана заштрихованной областью.

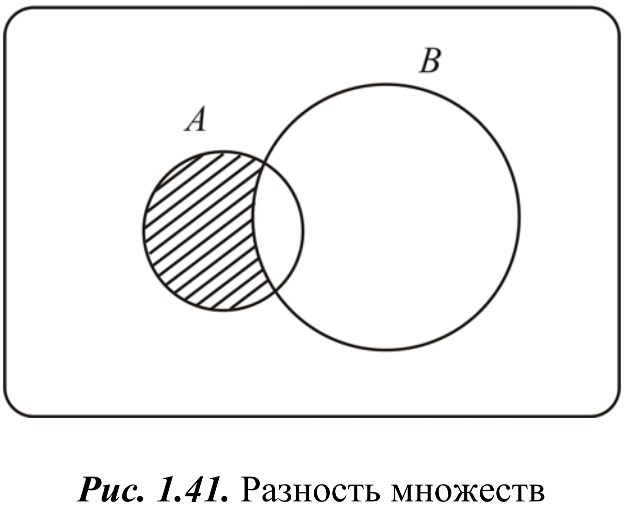


Рис. 1.41. Разность множеств

Дополнением множества A до универсального множества I называется множество $\overline{A}$, определяемое из соотношения $\overline{A} = I \setminus A$. На рисунке 1.42 множество $\overline{A}$ представляет собой незаштрихованную область. Формально дополнение множества можно определить в следующем виде: $\overline{A} = \{a \mid a \in I \text{ и } a \notin A\}$.

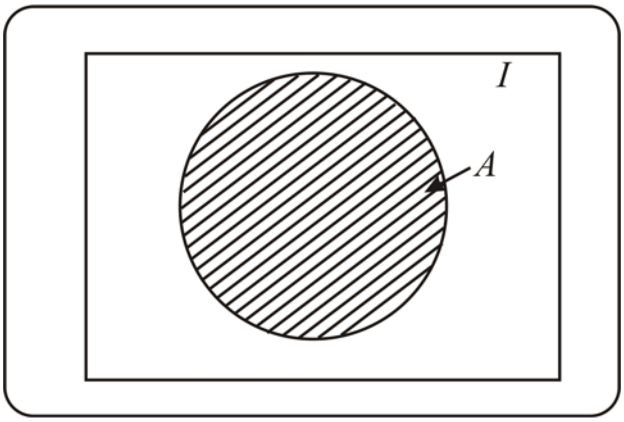


Рис. 1.42. Дополнение множества

Из определения дополнения множества следует, что множества A и $\overline{A}$ не имеют общих элементов, так что $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Разбиением множества M называется система множеств $\eta = (M_1, \cdots, M_n)$, если выполняются следующие условия:

– любое множество M_i из множества η является подмножеством множества M : $\forall M_i \in M[M_i \subseteq M]$;

– любые два множества M_i и M_j из множества η являются непересекающимися: $\forall M_i, M_j \in \eta\,[M_i \neq M_j \rightarrow M_i \cap M_j = \varnothing]$;

– объединение всех множеств, входящих в разбиение, дает множество M : $\bigcup\limits_{M_i \in \eta} M_i = M$.

Отметим, что понятие *разбиение множества* находится в тесной связи с понятием *отношение эквивалентности*, рассмотренным ранее.

Действительно, пусть M – множество, на котором определено отношение эквивалентности. Подмножество M_i элементов, эквивалентных некоторому элементу $m \in M$, будем называть *классом эквивалентности*. Обозначим через $\eta = (M_1, \cdots, M_n)$ множество классов эквивалентности для множества M . Очевидно, что все элементы одного класса эквивалентности эквивалентны между собой (свойство транзитивности) и всякий элемент $m \in M$ может находиться в одном и только в одном классе. Но в таком случае множество M является объединением непересекающихся множеств M_i, так что полная система классов $\eta = (M_1, \cdots, M_n)$ является разбиением множества M .

Таким образом, каждому отношению эквивалентности на множестве M соответствует некоторое разбиение этого множества на классы M_i.

Произведением множеств A и B называется множество $A \times B$ возможных упорядоченных пар (a, b), где первый элемент взят из множества A, а второй – из множества B, так что $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

1.8.6. Матрицы и операции над матрицами

Матрица – это совокупность чисел или объектов другой природы, расположенных в виде прямоугольной таблицы. Матрица имеет размер $m \times n$, и ее называют $(m \times n)$-матрицей, где m – число строк, n – число столбцов. Позицию на пересечении i-й строки и j-го столбца будем называть ij -клеткой. Числа или любые другие объекты, расположенные в клетках таблицы, называются *элементами* матрицы.

Матрицы, элементами которых являются вещественные или комплексные числа, называются соответственно *вещественными* или *комплексными*.

Способы представления матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad (1.58)$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{Vmatrix}; \qquad (1.59)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ...... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (1.60)$$

Различают следующие типы матриц.

Матрица-столбец (*столбцевая*) – матрица, состоящая из одного столбца.

Матрица-строка (*строчная*) – матрица, состоящая из одной строки.

Столбцевую и строчную матрицы называют также *векторами* и обозначают $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Матрица, количество строк и столбцов которой одинаково и равно n, называется *квадратичной* матрицей порядка n.

Матрица, все элементы которой вне главной диагонали равны нулю, обозначается $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$ и называется *диагональной*.

Если в диагональной матрице $d_1 = d_2 = ... = d_n = 1$, то ее называют *единичной*.

Матрица, все элементы которой равны 0, называется *нулевой* и обозначается цифрой 0.

Сложение матриц: *сумма* двух матриц A и B одинаковых размеров определяется как матрица C тех же размеров, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц, то есть $C = A + B$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Умножение матрицы на число (на скаляр): *произведением* матрицы A на скаляр α является матрица $C = \alpha A$, элементы которой получаются в результате умножения соответствующих элементов матрицы A на скаляр α: $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Умножение матриц: *произведением* матрицы A размера $(m \times n)$ на матрицу B размера $(m \times r)$ является матрица $C = AB$ размера $(m \times r)$, элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Умножение A на B допустимо, если число столбцов равно числу строк.

Транспонированием матрицы называется преобразование матрицы A, состоящее в замене строк столбцами (или столбцов строками) при сохранении их нумерации.

1.8.7. Определители n-го порядка

Пусть дана квадратичная матрица из n^2 элементов:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{matrix} \right\|. \tag{1.61}$$

Определителем n-го порядка, обозначаемым символом

$$\left| \begin{matrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{matrix} \right| \tag{1.62}$$

и соответствующим матрице (1.61), называется число D, равное сумме произведений элементов любого его j-го столбца (i-й строки) на их алгебраические дополнения:

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{1.63}$$

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.64}$$

Минором M_{ij} любого элемента a_{ij} этого определителя называется определитель $(n-1)$-го порядка, соответствующий матрице, полученной из данной путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, в котором лежит указанный элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} любого элемента a_{ij} определителя D называется его минор M_{ij}, взятый со знаком числа $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Не останавливаясь на доказательствах, перечислим основные свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

2. От перестановки двух столбцов или двух строк определитель меняет только знак.

3. Определитель, имеющий два одинаковых столбца (строки), равен нулю.

4. Если все элементы какого-либо столбца (строки) определителя умножить на одно и то же число m, то в результате определитель умножится на это число. Иначе говоря, общий множитель элементов какого-либо столбца (строки) можно выносить за знак определителя.

5. Определитель, у которого элементы двух столбцов (строк) соответственно пропорциональны, равен нулю.

6. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей. У одного из них элементами соответствующего столбца (строки) будут первые слагаемые, у другого – вторые. Остальные элементы у этих двух определителей те же, что и у данного.

7. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число.

1.8.8. Действия над векторами

Для понимания основных действий над векторами длиной n последние будем представлять в виде вектор-строки

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (a_i)_1^n \tag{1.65}$$

или вектор-столбца

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_i]_1^n. \qquad (1.66)$$

Один из этих векторов обозначим символом $\vec{a}$, а другой – символом $\vec{a}^{\mathrm{T}}$ и назовем его *транспонированным вектором* $\vec{a}$. Таким образом, операция транспонирования вектора представляет собой переход от вектор-столбца к вектор-строке и наоборот.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если равны их компоненты:

$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если } a_i = b_i,\ i = \overline{1, n}. \qquad (1.67)$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют *ортогональными*, если угол между ними равен $\pi/2$.

Над векторами, как и над числами, можно производить алгебраические действия, однако при этом необходимо соблюдать свои определенные законы.

Так, при сложении двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получается вектор $\vec{a} + \vec{b}$, называемый *суммой векторов*, компоненты которого являются суммой компонент слагаемых:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}. \qquad (1.68)$$

Из определения суммы векторов очевидно, что $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ и $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

При вычитании векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получается вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, называемый *разностью векторов*, такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Очевидно, что разность векторов можно определить по выражению

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}. \qquad (1.69)$$

Умножение вектора $\vec{a}$ на скаляр λ дает вектор, компоненты которого получаются из компонент вектора $\vec{a}$ путем умножения их на число λ:

$$\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda = \lambda\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}. \tag{1.70}$$

В соответствии с данными определениями действия над двухэлементными и трехэлементными векторами допускают другое понимание, позволяющее геометрически интерпретировать их смысловое значение.

Так, *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 1.43).

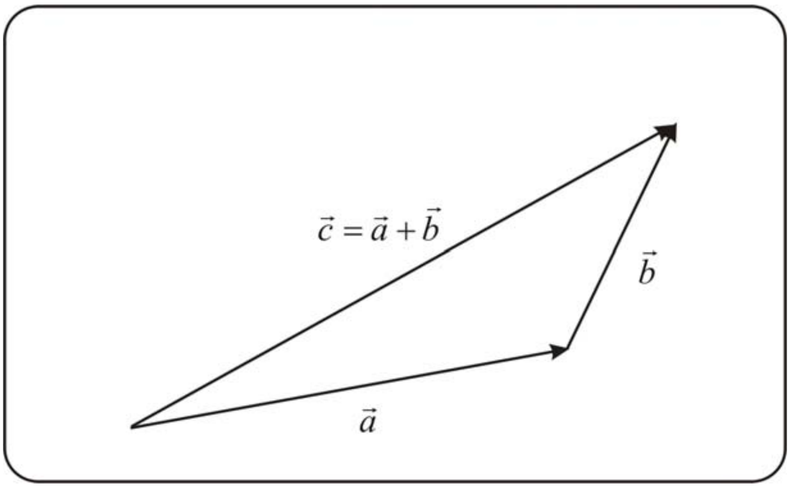


Рис. 1.43. Сложение векторов

Сложение векторов подчиняется переместительному $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ и сочетательному $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ законам.

Заметим, что операция сложения векторов может быть распространена на любое число слагаемых. Так, при сложении n векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ необходимо к концу первого вектора приложить начало второго, затем к концу второго вектора приложить начало третьего и т. д. и, наконец, приложить к концу предпоследнего вектора начало последнего. Замыкающий вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, и будет являться суммой данных векторов. Из переместительного и сочетательного законов следует, что при сложении векторов можно любым образом группировать слагаемые.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, для которого справедливо равенство $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Для геометрического построения вектор-разности $\vec{c}$ двух векторов можно поступить одним из двух способов. При первом к некоторому началу прикладываются вектор-уменьшаемое $\vec{a}$ и вектор-вычитаемое $\vec{b}$ (рис. 1.44, *а*). Затем из конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$ проведем вектор $\vec{c}$, который и будет искомым вектор-разностью $\vec{c}$. При втором способе к концу вектора $\vec{a}$ прикладывается вектор $\vec{d}$, противоположный вектору $\vec{b}$ (то есть равный вектору $-\vec{b}$). Затем проводится вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{d}$, который и будет искомым вектором $\vec{c}$.

При умножении вектора $\vec{a}$ на скаляр λ получается *вектор-произведение* $\lambda\vec{a}$ длиной $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, параллельный вектору $\vec{a}$ и направленный так же, как и вектор $\vec{a}$, если $\lambda>0$, или противоположно ему, если $\lambda<0$ (рис. 1.44, *б*).

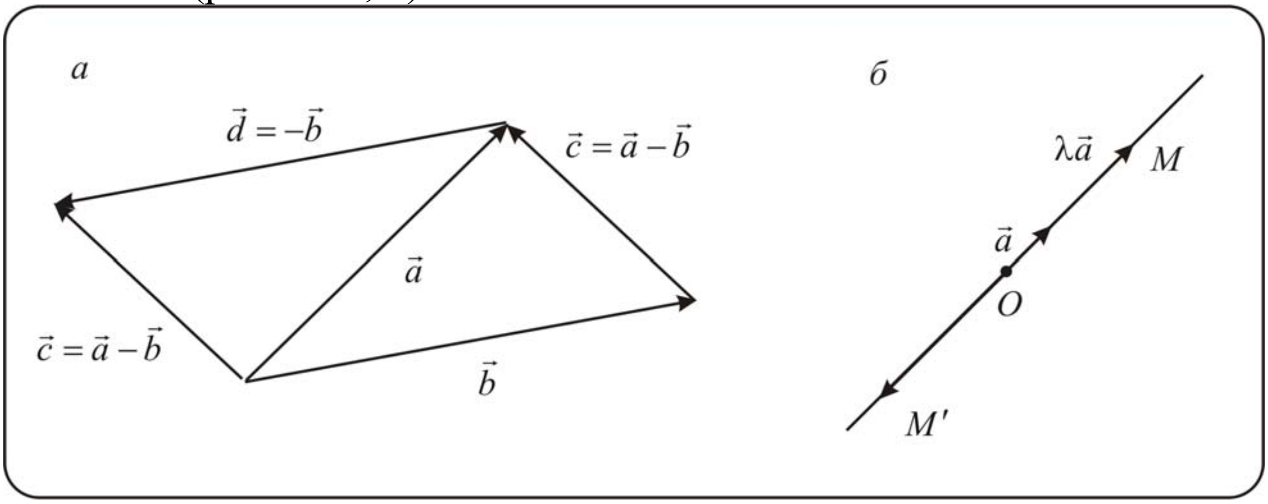


Рис. 1.44. Действия над векторами:
а – вычитание векторов; *б* – умножение вектора на скаляр

Для построения вектор-произведения $\lambda\vec{a}$ отложим на прямой, на которой расположен вектор $\vec{a}$, в зависимости от знака скаляра λ в направлении этого вектора или в противоположном отрезок OM или OM' длиной, равной $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$. Полученные при таком построении векторы $\overline{OM}$, $\overline{OM'}$ и будут искомыми, то есть $\overline{OM}=\lambda\vec{a}$, если $\lambda>0$ или $\overline{OM'}=\lambda\vec{a}$, если $\lambda<0$.

Умножение вектора на скаляр подчиняется как сочетательному $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$, так и распределительному $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$; $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ законам.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин (модулей), умноженному на косинус угла φ между векторами. Для обозначения скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ употребляется одна из записей: $(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$.

Согласно определению, имеем

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi. \tag{1.71}$$

Очевидно, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет равно нулю, если хотя бы один из этих векторов является нулевым вектором или если векторы перпендикулярны (ортогональны). Поскольку $|\vec{b}|\cos\varphi=\text{пр}_a b$, то равенство (1.71) можно записать в виде

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_a b. \tag{1.72}$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно длине одного вектора, умноженной на проекцию второго вектора на направление первого.

Для любых векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ скалярное произведение подчиняется переместительному $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$, сочетательному $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$ и распределительному $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$ законам.

Заметим, что квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2. \tag{1.73}$$

В практических приложениях иногда целесообразно выражения скалярного произведения выражать в координатной форме. Для определения этих выражений предварительно рассмотрим вопрос о скалярном произведении ортов. Так как разноименные орты перпендикулярны друг другу, а одноименные равны, то справедливы следующие выражения:

$$(\mathrm{i},\mathrm{i})=(\mathrm{i})^2=|\,\mathrm{i}\,|^2=1;\ (\mathrm{j},\mathrm{j})=1;\ (\mathrm{k},\mathrm{k})=1; \tag{1.74}$$

$$\left(\mathrm{i},\mathrm{j}\right)=\left(\mathrm{j},\mathrm{r}\right)=\left(\mathrm{k},\mathrm{i}\right)=0. \qquad (1.75)$$

Таким образом, скалярное произведение одноименных ортов равно единице, а разноименных – нулю.

Возьмем теперь два вектора, заданных в координатной форме $\vec{a}=a_x\mathrm{i}+a_y\mathrm{j}+a_z\mathrm{k}$, $\vec{b}=b_x\mathrm{i}+b_y\mathrm{j}+b_z\mathrm{k}$, и перемножим их скалярно. Поскольку скалярное произведение подчиняется распределительному закону, то его правые части можно перемножать по правилу умножения многочлена на многочлен:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(a_x\mathrm{i}+a_y\mathrm{j}+a_z\mathrm{k}\right)\left(b_x\mathrm{i}+b_y\mathrm{j}+b_z\mathrm{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\left(\mathrm{i},\mathrm{i}\right)+a_xb_y\left(\mathrm{i},\mathrm{j}\right)+a_xb_z\left(\mathrm{i},\mathrm{k}\right)+b_xa_y\left(\mathrm{j},\mathrm{i}\right)+a_yb_y\left(\mathrm{j},\mathrm{j}\right)+$$

$$+a_yb_z\left(\mathrm{j},\mathrm{k}\right)+b_xa_z\left(\mathrm{k},\mathrm{i}\right)+b_ya_z\left(\mathrm{k},\mathrm{j}\right)+a_zb_z\left(\mathrm{k},\mathrm{k}\right). \qquad (1.76)$$

На основании выражений (1.74) и (1.75) равенство (1.76) примет следующий вид:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (1.77)$$

Следовательно, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, длина которого равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости этого параллелограмма и направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки (рис. 1.45, *а*). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, их векторным произведением называется нулевой вектор. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$ или $[\vec{a},\vec{b}]$. Из определения следует, что если $\vec{c}=[\vec{a},]$, то

$$|\,\vec{c}\,|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi, \qquad (1.78)$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

При векторном умножении вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ получим вектор $[\vec{b},\vec{a}]$, равный по модулю вектору $[\vec{a},\vec{b}]$, но направленный в противоположную сторону (рис. 1.45, *б*):

$$\left[\vec{b},\vec{a}\right] = -\left[\vec{a},\vec{b}\right]. \tag{1.79}$$

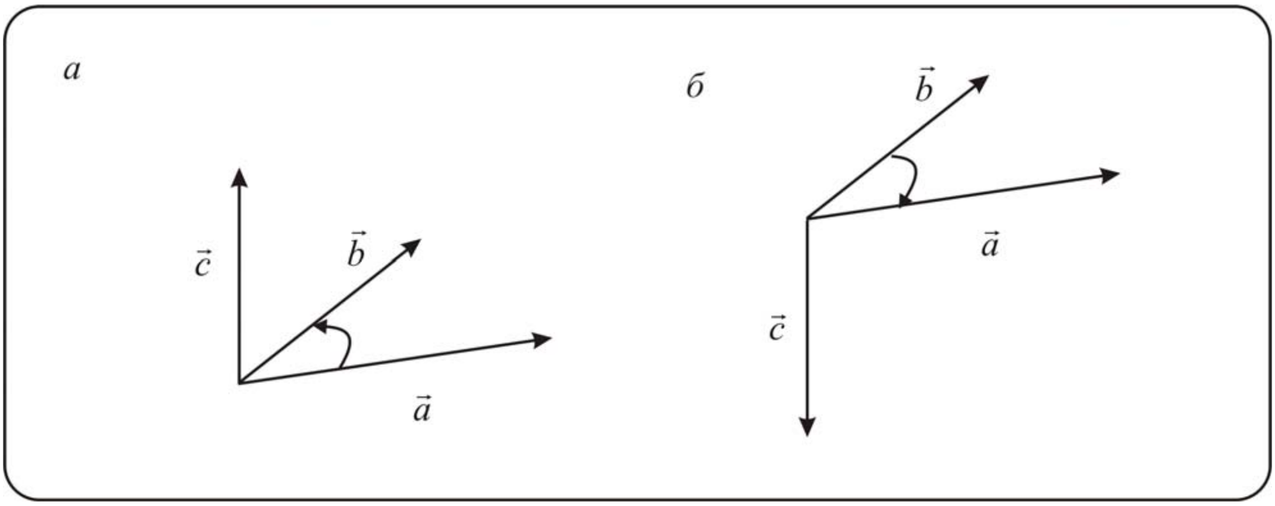


Рис. 1.45. Векторное произведение векторов:
а – $[\vec{a},\vec{b}]$; *б* – $[\vec{b},\vec{a}]$

Из равенства (1.79) вытекает, что векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть нулевой вектор в том и только в том случае, если эти векторы коллинеарны. Обращение векторного произведения в нулевой вектор есть условие коллинеарности двух векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа λ векторное произведение подчиняется сочетательному $[\lambda\vec{a},\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$, $[\vec{a},\lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$ и распределительному $[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$ законам, но не подчиняется переместительному закону, так как $[\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{b},\vec{a}]$.

В практических приложениях иногда целесообразно векторное произведение, так же как и скалярное, выражать в координатной форме. Для определения этих выражений предварительно рассмотрим вопрос о векторном произведении ортов. Так как одноименные орты коллинеарны, то справедливы следующие выражения:

$$[\mathrm{i},\mathrm{i}] = 0; \; [\mathrm{j},\mathrm{j}] = 0; \; [\mathrm{k},\mathrm{k}] = 0. \tag{1.80}$$

При векторном умножении вектора i на вектор j получается вектор, расположенный перпендикулярно плоскости xOy и направленный по направлению оси Oz. Модуль его будет равен единице, так как $|[\mathrm{i},\mathrm{j}]| = |\mathrm{i}||\mathrm{j}|\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Следовательно, в результате умножения получим единичный вектор, направленный по направлению оси Oz, то есть вектор k. Но так как

$$[\mathrm{i},\mathrm{j}] = \mathrm{k}, \tag{1.81}$$

то

$$[\mathrm{j},\mathrm{i},] = -\mathrm{k}. \tag{1.82}$$

Аналогично производя умножение других разноименных ортов, получим следующие равенства:

$$[\mathrm{j},\mathrm{k}] = \mathrm{i};\ [\mathrm{k},\mathrm{j}] = -\mathrm{i};$$

$$[\mathrm{k},\mathrm{i}] = \mathrm{j};\ [\mathrm{i},\mathrm{k}] = -\mathrm{j}. \tag{1.83}$$

Возьмем теперь два вектора: $\vec{a} = a_x\mathrm{i} + a_y\mathrm{j} + a_z\mathrm{k}$, $\vec{b} = b_x\mathrm{i} + b_y\mathrm{j} + b_z\mathrm{k}$ и рассмотрим их векторное произведение. Так как оно подчиняется распределительному закону, то векторы можно умножать по правилу умножения многочлена на многочлен, строго соблюдая порядок расположения множителей. Учитывая, что при умножении скалярные множители можно выносить за знак векторного произведения, получим

$$[\vec{a},\vec{b}] = [a_x\mathrm{i} + a_y\mathrm{j} + a_x\mathrm{k}, b_x\mathrm{i} + b_y\mathrm{j} + b_x\mathrm{k}] =$$

$$= a_xb_x[\mathrm{i},\mathrm{i}] + a_xb_y[\mathrm{i},\mathrm{j}] + a_xb_z[\mathrm{i},\mathrm{k}] + a_yb_x[\mathrm{j},\mathrm{i}] +$$
$$+ a_yb_y[\mathrm{j},\mathrm{j}] + a_yb_z[\mathrm{j},\mathrm{k}] + a_zb_x[\mathrm{k},\mathrm{i}] + a_zb_y[\mathrm{k},\mathrm{j}] + a_zb_z[\mathrm{k},\mathrm{k}]. \tag{1.84}$$

Используя равенства (1.81) – (1.83), упростим, а затем преобразуем правую часть равенства (1.84):

$$[\vec{a},\vec{b}] = a_xb_y\mathrm{k} - a_xb_z\mathrm{j} - a_yb_x\mathrm{k} + a_yb_z\mathrm{j} + a_zb_x\mathrm{j} - a_zb_y\mathrm{i} =$$

$$= \mathrm{i}\left(a_yb_z - a_zb_y\right) + \mathrm{j}\left(a_zb_x - a_xb_z\right) + \mathrm{k}\left(a_xb_y - a_yb_x\right). \tag{1.85}$$

Равенство (1.85) можно записать с помощью определителей:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\mathrm{i}\begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix}+\mathrm{j}\begin{vmatrix} a_z a_x \\ b_z b_x \end{vmatrix}+\mathrm{k}\begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix} \tag{1.86}$$

или условно в виде

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.87}$$

Равенство (1.87) дает выражение векторного произведения через координаты векторов.

1.9. Множество комплексных чисел

В результате последовательных обобщений понятий различных классов чисел и упорядоченного множества появилось понятие «*комплексное число* z*»* (*комплекс*), под которым понимают всякую упорядоченную пару (a, b) действительных чисел a и b.

Совокупность таких упорядоченных пар (a, b) образует *множество комплексных чисел*, обозначаемое символом C и включающее в себя множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел, то есть $\mathrm{N} \subset \mathrm{C}$, $\mathrm{Z} \subset \mathrm{C}$, $\mathrm{Q} \subset \mathrm{C}$, $\mathrm{R} \subset \mathrm{C}$. Множество C относительно этих подмножеств является универсальным: $\mathrm{C} = I$.

Условимся вместо комплексного числа $(a,\ 0)$ писать просто a, а комплексное число $(0,\ 1)$ обозначать буквой j или i и называть *мнимой единицей*.

Два комплексных числа (a, b) и (c, d) называются *равными* тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Комплексным нулем называют пару $(0, 0)$.

Числом, противоположным числу $z = (a, b)$, считают число $(-a, -b)$ и обозначают его как $-z$.

Суммой комплексных чисел $z = (a,b)$ и $w = (c,d)$ называется комплексное число $(a + c, b + d)$.

Разностью комплексных чисел $z=(a,b)$ и $w=(c,d)$ называется такое число $u=(a-c,b-d)$, которое при сложении с числом $w=(c,d)$ дает число $z=(a,b)$, то есть $z=w+u$.

Произведением комплексных чисел $z=(a,b)$ и $w=(c,d)$ называется комплексное число $(ac-bd,ad+bc)$.

Используя правило умножения комплексных чисел и принятое условное обозначение мнимой единицы, нетрудно получить следующее:

$$j^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1. \qquad (1.88)$$

Частным от деления комплексного числа $z=(a,b)$ на комплексное число $w=(c,d)$ называется комплексное число

$$u=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right), \qquad (1.89)$$

такое, что $z=uw$.

С учетом принятых обозначений, в результате сложения комплексного числа $(a,0)$ с произведением комплексных чисел $(b,0)$ и $(0,1)$ получается *алгебраическая форма комплексного числа*:

$$z=(a,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+jb. \qquad (1.90)$$

Число a называется действительной частью комплексного числа z, а jb – его мнимой частью.

Если действительная часть комплексного числа равна нулю, то оно называется *мнимым числом* $z=(0,b)=(b,0)\cdot(0,1)=jb$, а если мнимая часть равна нулю, то оно называется *действительным числом* $z=(a,0)=a$. Числа $(a+jb)$ и $(a-jb)$ называются *комплексно-сопряженными.*

Над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно осуществлять все арифметические операции, как над обычными двучленами, учитывая лишь, что $j^2=-1$.

Сложение комплексных чисел:

$$z+w=(a,b)+(c,d)=(a+jb)+(c+jd)=(a+c)+j(b+d). \qquad (1.91)$$

Вычитание комплексных чисел:

$$z - w = (a, b) - (c, d) = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d). \quad (1.92)$$

Умножение комплексных чисел:

$$zw = (a, b)\cdot(c, d) = (a + jb)\cdot(c + jd) = ac + jbc + jad + j^2bd = \quad (1.93)$$

$$= (ac - bd) + j(ad + bc).$$

Деление комплексных чисел:

$$\frac{z}{w} = \frac{(a, b)}{(c, d)} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)\cdot(c - jd)}{(c + jd)\cdot(c - jd)} = \quad (1.94)$$

$$= \frac{ac + jbc - jad - j^2bd}{c^2 - j^2d^2} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Таким образом, алгебраическая форма существенно облегчает выполнение арифметических операций над комплексными числами.

Определяя комплексное число z как упорядоченное множество двух вещественных чисел (a, b), можно его (комплексное число) рассматривать как точку на плоскости (рис. 1.46, *а*) или вектор, проведенный из начала координат в данную точку (рис. 1.46, *б*). Компоненты a и b будут проекциями точки (вектора) на координатные оси.

Плоскость с нанесенными на ней осями действительных и мнимых чисел называется *комплексной числовой плоскостью*.

По оси абсцисс комплексной плоскости откладывают действительную часть комплексного числа, а по оси ординат – мнимую. На оси действительных значений ставим $+1$, а на оси мнимых значений $+j$.

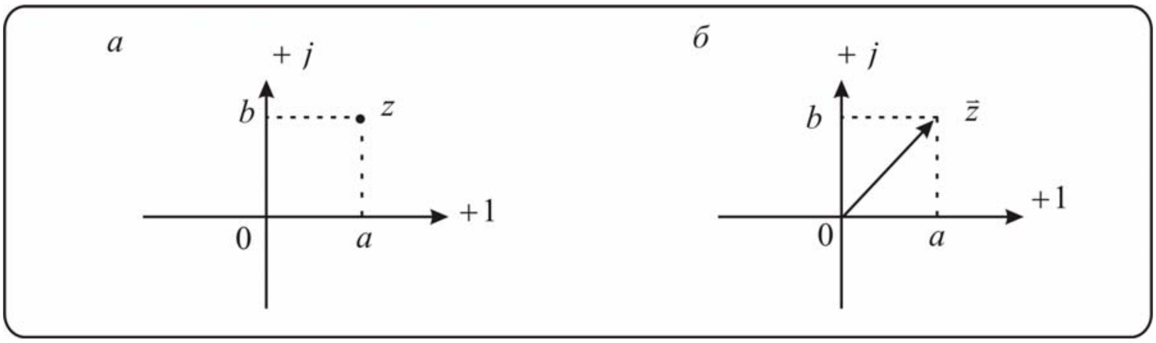


Рис. 1.46. Изображение комплексных чисел в видах:
а – точки; *б* – вектора

Комплексная числовая плоскость используется для взаимно однозначного соответствия между точками плоскости (векторами на плоскости) и комплексными числами. При этом каждому комплексному числу ставится в соответствие единственная точка комплексной плоскости (вектор на плоскости), а каждой точке комплексной плоскости (вектору на плоскости) – единственное комплексное число. При этом проекцией точки на действительную ось является число a, а проекцией этой точки на мнимую ось – число b.

Рассматривая комплексное число как вектор, проведенный из начала координат на комплексной плоскости, можно при сложении и вычитании комплексных чисел использовать графические правила сложения, вычитания и разложения векторов.

При сложении двух векторов следует к концу первого слагаемого вектора приложить начало второго вектора, сохранив направление последнего неизменным. Сумма векторов определяется величиной отрезка, имеющего начало в точке 0 и конец, совпадающий с концом второго слагаемого вектора (рис. 1.47).

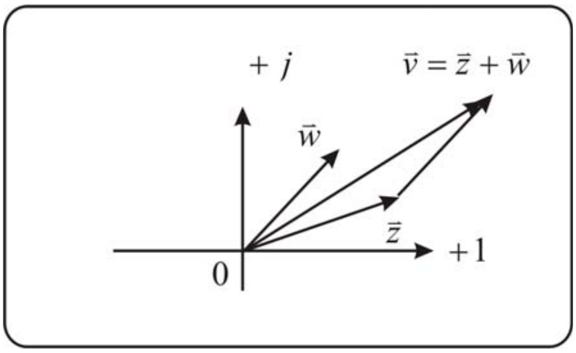


Рис. 1.47. Векторное сложение
комплексных чисел

Вычесть из одного вектора другой – это значит к первому из них прибавить второй, но с обратным знаком (направлением). На рис. 1.48 показан пример вычитания двух комплексных чисел графическим методом.

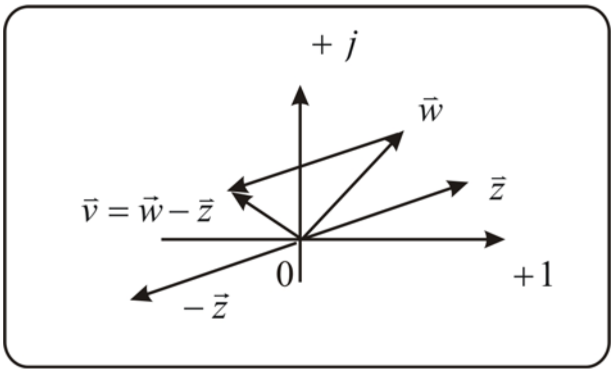


Рис. 1.48. Векторное вычитание комплексных чисел

Разложить вектор – это значит представить его как сумму двух векторов, расположенных на координатных осях (действительной и мнимой осях), то есть под прямым углом друг к другу.

Всякий вектор, проведенный на комплексной плоскости, следовательно, и комплексное число, можно характеризовать не только его проекциями a и b, но и такими параметрами, как *модуль* $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ и *аргумент* $\varphi=\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$, которые позволяют единственным способом представить комплексное число в *показательной форме* (рис. 1.49):

$$z=(a,b)=|z|\,e^{j\varphi}, \tag{1.95}$$

где φ и $|z|$ – соответственно аргумент и модуль комплекса;

$e=2{,}718$ – основание натуральных логарифмов.

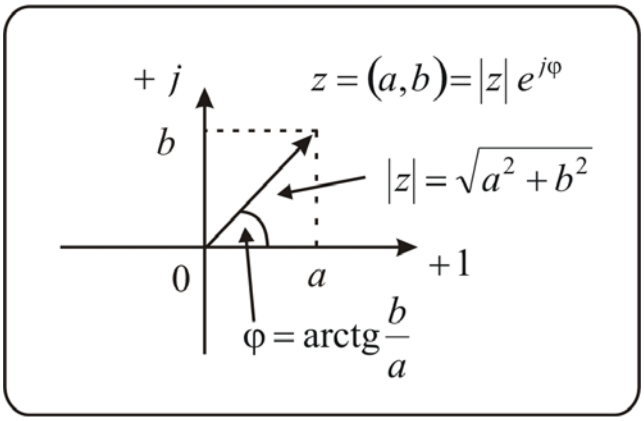


Рис. 1.49. Изображение комплексного числа в показательной форме

Показательная форма комплекса позволяет упростить операции умножения и деления комплексных чисел. Действительно, учитывая свойство степеней с одинаковыми основаниями, нетрудно определить правила выполнения этих операций.

Произведение двух комплексов, выраженных в показательной форме, есть комплекс, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент – алгебраической сумме аргументов перемножаемых комплексов:

$$z = z_1 \cdot z_2 = |z_1|\, e^{j\varphi_1} \cdot |z_2|\, e^{j\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2|\, e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = |z|\, e^{j\varphi}. \quad (1.96)$$

Заметим, что произведение двух сопряженных комплексов z_1 и z_1^* есть число действительное:

$$z = z_1 \cdot z_1^* = |z_1| e^{j\varphi_1} \cdot |z_2| e^{-j\varphi_2} = |z_1|^2 e^{j(\varphi_1-\varphi_1)} = |z|^2. \quad (1.97)$$

Частное от деления двух комплексов, выраженных в показательной форме, есть комплекс, модуль которого равен частному от деления модуля комплекса делимого на модуль комплекса делителя, а аргумент равен алгебраической разности аргументов делимого и делителя:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\, e^{j\varphi_1}}{|z_2|\, e^{j\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = |z|\, e^{j\varphi}. \quad (1.98)$$

При возведении комплекса в степень необходимо возвести в заданную степень его модуль, а аргумент помножить на показатель степени:

$$z = z_1^n = \left(|z_1|\, e^{j\varphi_1}\right)^n = |z_1|^n e^{jn\varphi_1} = |z|\, e^{j\varphi}. \quad (1.99)$$

При извлечении корня из комплекса необходимо извлечь корень данной степени из модуля комплекса, а аргумент комплекса разделить на показатель корня:

$$z = \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|\, e^{j\varphi_1}} = \sqrt[n]{|z_1|} \cdot e^{j\frac{\varphi_1}{n}} = ze^{j\varphi}. \quad (1.100)$$

Изображая комплексное число в виде вектора, проведенного на комплексной плоскости, можно представить его *в тригонометрической форме*. Для этого необходимо его проекции на координатные оси выразить через модуль и аргумент комплекса (рис. 1.50):

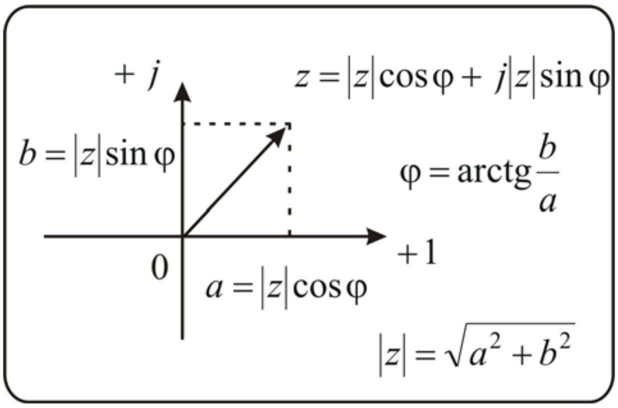


Рис. 1.50. Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z=(a,b)=a+jB=|z|\,e^{j\varphi}==|z|\cos\varphi+|z|\sin\varphi. \qquad (1.101)$$

Заметим, что при значении модуля $|z|=1$ выражение (1.101) примет вид

$$e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi. \qquad (1.102)$$

Это выражение называется *формулой Эйлера*.

При значениях параметров $|z|=1$ и $\varphi=0$ выражение (1.101) примет вид

$$e^{j0}=\cos 0+j\sin 0=1+j0=1. \qquad (1.103)$$

При значениях параметров $|z|=1$ и $\varphi=\pi/2$ выражение (1.101) примет вид

$$e^{j\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}=0+j1=j1=j. \qquad (1.104)$$

При значениях параметров $|z|=1$ и $\varphi=\pi$ выражение (1.101) примет вид

$$e^{j\pi}=\cos\pi+j\sin\pi=-1+j0=-1. \qquad (1.105)$$

При значениях параметров $|z|=1$ и $\varphi=\dfrac{3}{2}\pi$ выражение (1.101) примет вид

$$e^{j\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - j1 = -j1 = -j\,. \qquad (1.106)$$

Поскольку комплекс $e^{j\varphi}$ на комплексной плоскости представляется единственным способом в виде вектора единичной длины и при значениях аргумента, равных $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_3 = \pi$, $\varphi_4 = 2\pi/3$, принимает соответствующие значения $1, j, -1, -j$, то эти величины можно рассматривать как векторы единичной длины с соответствующими аргументами.

Комплексно сопряженное число $e^{-j\varphi}$

$$e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi) = \cos\varphi - j\sin\varphi\,. \qquad (1.107)$$

Тригонометрическую функцию $\cos\varphi$ можно представить в показательной форме комплексных чисел. Действительно,

$$e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi + \cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi) = 2\cos\varphi\,. \quad (1.108)$$

Отсюда получаем

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \qquad (1.109)$$

то есть сложение двух комплексно-сопряженных векторов единичной длины дает вектор, расположенный на действительной оси и по модулю равный $2\cos\varphi$.

Тригонометрическую функцию $\sin\varphi$ можно представить в показательной форме комплексных чисел. Действительно,

$$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi - \cos(-\varphi) - j\sin(-\varphi) = j2\sin\varphi\,. \quad (1.110)$$

Отсюда получаем

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}, \qquad (1.111)$$

то есть вычитание двух комплексно-сопряженных векторов единичной длины дает вектор, расположенный на мнимой оси и по модулю равный $2\sin\varphi$.

Мнимую единицу j можно выразить через величину $1/_{-j}$:

$$\frac{1}{-j} = \frac{e^{j0}}{e^{-j\frac{\pi}{2}}} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j. \tag{1.112}$$

Умножение вектора $z = |z|\, e^{j\varphi}$ на мнимую единицу j дает вектор, по модулю равный $|z|$, но повернутый в сторону опережения (против часовой стрелки по отношению к исходному вектору) на угол, равный $90°$:

$$|z| e^{j\varphi} \cdot j = |z|\, e^{j\varphi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = |z|\, e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{1.113}$$

Умножение вектора $z = |z|\, e^{j\varphi}$ на $-j$ дает вектор, по модулю равный $|z|$, но повернутый в сторону отставания (по часовой стрелке по отношению к исходному вектору) на угол, равный $90°$:

$$|z|\, e^{j\varphi} \cdot j = |z|\, e^{j\varphi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = |z|\, e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{1.114}$$

Показательная и тригонометрическая формы записи позволяют легко определить *формулу Муавра*:

$$z^n = |z|^n e^{jn\varphi} = |z|^n \cos n\varphi + j|z|^n \sin n\varphi. \tag{1.115}$$

Гармонические колебания можно представить как проекции вращающегося вектора на координатные оси комплексной плоскости. Действительно, так как угол φ в комплексе $z = |z|\, e^{j\varphi}$ может быть любым, то, положив его равным $\varphi = \omega t + \psi$, получим

$$z = |z|\, e^{j(\omega t+\psi)} = |z| \cos(\omega t + \psi) + j|z| \sin(\omega t + \psi). \qquad (1.116)$$

Таким образом, синусоидально изменяющуюся величину можно представить как проекцию вращающегося вектора на мнимую ось $+j$, а косинусоидально изменяющуюся величину – как проекцию вращающегося вектора на действительную ось $+1$ (рис. 1.51).

С целью единообразия на комплексной плоскости принято графически изображать вращающийся вектор $z = |z|\, e^{j(\omega t+\psi)}$ для момента времени, равного нулю, то есть $\omega t = 0$.

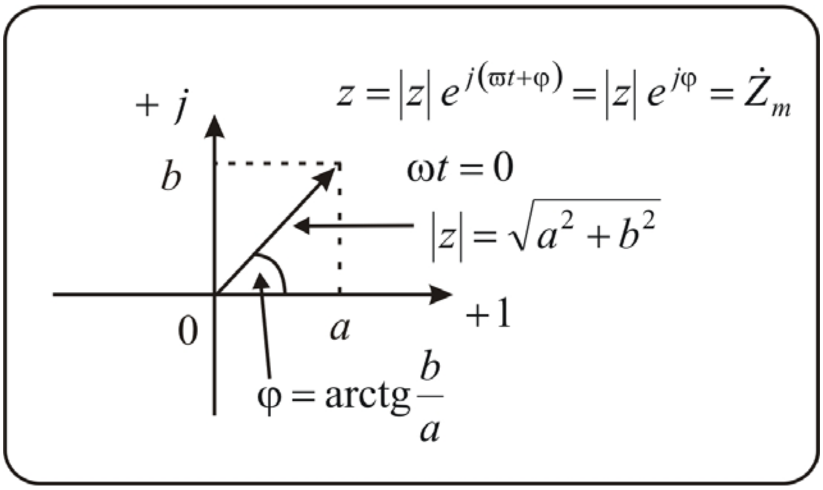


Рис. 1.51. Изображение гармонического колебания вращающимся вектором

При этом вектор $z = |z|\, e^{j(\omega t+\psi)} = |z|\, e^{j\psi} = \dot{Z}_m$, где $\dot{Z}_m$ – комплексная амплитуда вращающегося вектора.

1.10. Понятие пространства

Говорят, что *множество имеет структуру*, если между его элементами установлены определенные соотношения или над ними определены некоторые операции [3]. Множества, наделенные структурой, называются *пространством*.

1.10.1. Метрические пространства

Рассмотрение пространств начнем с метрического, для определения которого введем понятие *расстояние* между элементами множества.

Пусть A – произвольное множество. Свяжем с каждой парой элементов из множества A некоторое вещественное число $d \geq 0$. Это число называется *расстоянием*, или *метрикой*, во множестве A, если для любых трех элементов $(a_i, a_j, a_k \in A)$ оно удовлетворяет следующим свойствам:

1) $d(a_i, a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a_i = a_j$(аксиома идентичности);

2) $d(a_i, a_j) = d(a_j, a_i)$ (аксиома симметрии);

3) для любой тройки $a_i, a_j, a_k \in A$ имеет место $d(a_i, a_j) \leq d(a_i, a_k) + d(a_k, a_j)$ (аксиома треугольника).

Метрическим пространством называется пара (A, d), то есть множество A с определенной на ней метрикой $d \geq 0$. Элементы множества A называются *точками метрического пространства* (A, d). Из данного определения следует, что множество A только тогда превращается в метрическое пространство, когда в него введена соответствующая метрика $d(a_i, a_j)$. Если в одно и то же множество A ввести различные метрики, то получатся и различные пространства.

Так, например, множество R можно превратить в метрическое пространство, если расстояние между элементами a_i и a_j определять согласно выражению

$$d(a_i, a_j) = |a_i - a_j|. \tag{1.117}$$

Именно по этой формуле находят расстояния между точками вещественной оси, которая является простейшим примером метрического пространства.

Расширенным представлением метрического пространства является упорядоченное n-мерное множество, в котором расстояние между точками a_i и a_j определяется по формуле

$$d_2\left(a_i, a_j\right) = \left\{\sum_{i=1}^{n}\left|a_i - a_j\right|^2\right\}^{1/2}. \qquad (1.118)$$

При $n = 2, 3$ это определение совпадает с обычным геометрическим понятием расстояния.

Метрика $d_2(a_i, a_j)$ называется *евклидовой*, а пространство R^n с такой метрикой – *евклидовым*, и обозначается символом E_n.

Для множества R^n расстояние может быть определено и другими способами, например,

$$d_1\left(a_i, a_j\right) = \left\{\sum_{i=1}^{n}\left|a_i - a_j\right|\right\}. \qquad (1.119)$$

1.10.2. Линейные пространства

Введение метрики далеко не исчерпывает всех структурных свойств различных пространств. В частности, если множество A состоит из вещественных или комплексных чисел, то к важным структурным свойствам относится возможность получения одних элементов множества из других путем сложения этих элементов или умножения элемента на скаляр. Множества, обладающие этими свойствами, относятся к классу *линейных пространств*, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. Каждой паре элементов $a_i, a_j \in A$ однозначно определен третий элемент $a_k \in A$, называемый их суммой и обозначаемый $a_i + a_j$. Сумма обладает следующими свойствами:

- коммутативностью: $a_i + a_j = a_j + a_i$;
- ассоциативностью: $a_i + (a_j + a_k) = (a_i + a_j) + a_k$;
- в множестве A существует такой элемент 0, что $a_i + 0 = a_i$ для всех $a_i \in A$ (существование нуля);
- для каждого элемента $a_i \in A$ существует такой элемент $-a_i$, что $a_i + (-a_i) = 0$ (существование противоположного элемента).

2. Для любого числа α и любого элемента $a_i \in A$ определен элемент $\alpha a \in A$, причем $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$; $\alpha(a_i + a_j) = \alpha x_i + \alpha a_j$.

Множества, элементы которых допускают выполнение операций сложения и умножения на скаляр, весьма разнообразны. К ним можно отнести следующие:

- множество вещественных чисел R с обычным определением операций сложения и умножения;
- множество векторов;
- множество X всех непрерывных на заданном отрезке функций $x_i(t)$, если для любых функций $x_i(t), x_j(t) \in X$ под $x_i(t) + x_j(t)$ понимать сумму значений функций $x_i(t)$ и $x_j(t)$, взятых при одних и тех же значениях аргумента t, а под $\alpha x_i(t)$ – новую функцию, полученную из функции $x_i(t)$ путем умножения всех ее значений на постоянное число α.

Заметим, что нулевой функцией будет функция $x_i(t) = 0$, тождественно равная нулю на всем заданном интервале.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Дифференциальное исчисление как раздел математики широко используется при исследовании процессов получения, преобразования, передачи и потребления электрической энергии. Оно помогает уяснить физический смысл многих понятий, применяемых в дисциплине «Математические основы защиты информации», а также вычислить значения функций, описывающих те или иные электромагнитные процессы, протекающие в источниках и устройствах хранения, обработки и передачи информации.

Исчисление – это составная часть названия некоторых разделов математики, в которых изучаются правила вычислений и оперирования с объектами определенного типа.

Дифференциальное исчисление – это составная часть математического анализа, изучающая свойство функций с помощью производных и дифференциалов.

2.1. Общие сведения о величинах

2.1.1. Физическая величина

В различных областях теории и практики хранения, обработки и передачи информации при различных исследованиях приходится иметь дело с величинами самой разнообразной природы: энергией, электродвижущей силой, магнитным потоком, силой тока, напряжением и т. д.

Для выявления сущности физической и математической величин рассмотрим некоторые основные понятия.

Свойство – это философская категория, выражающая такую сторону предмета, которая обусловливает его различие или общность с другими предметами и обнаруживается в его отношении к ним [6].

Величина – свойство тела (вещества, поля, явления, процесса или информации), которое может выделяться качественно и определяться количественно [6].

Физическая величина – одно из свойств физического объекта (физической системы, явления или процесса), общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них [6].

Качественная сторона определяет вид величины (например, магнитный поток), а количественная – ее размер (например, магнитный поток в конкретной области).

Количественной характеристикой измеряемой физической величины служит ее размер. По определению [6], *размер физической величины* – это ее количественная определенность, присущая конкретному материальному объекту, системе, явлению или процессу. Количественная оценка измеряемой физической величины должна быть не просто числом, а числом именованным, то есть иметь значение.

Значение физической величины – это выражение размера физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц. Например, в нагрузке ток протекает с силой 5 А, напряжение на участке цепи равно 10 В, реактивная мощность в контуре не превышает значения 30 ВА и т. п.

Числовое значение измеряемых физических величин зависит от используемых единиц их измерения. *Единица измерения* (согласно [7], ее также называют *мерой*) – это физическая величина, которой по определению присвоено числовое значение, равное единице [8]. Так, например, за единицу измерения силы тока в Международной системе единиц принят ампер, определяющий значение силы такого неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Заметим, что по определению [6], под *мерой* физической величины понимают также и средство измерения, предназначенное для воспроизведения и (или) хранения физической величины одного или нескольких заданных размеров, значения которых выражены в установленных единицах и известны с необходимой точностью.

Единицы измерения величин в настоящее время воспроизводятся централизованно, с помощью специальных технических средств, называемых эталонами. *Эталон единицы величины* – это средство измерения (техническое устройство), обеспечивающее воспроизведение и (или) хранение единицы с целью передачи ее размера нижестоящим по поверочной схеме средствам измерения, выполненное по особой спецификации и официально утвержденное в установленном порядке в качестве эталона [8].

Все физические величины обладают одним общим свойством, характеризующим возможность быть измеренным, то есть быть сравнимым с другой величиной того же рода, принятой за единицу измерения (меру). Например, количество электричества (электрический заряд) измеряется единицей заряда – кулоном, величина тока – единицей силы тока – ампером и т. п.

Под *измерением физической величины* понимают совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения измеряемой величины с ее единицей и получения значения этой величины.

При определении значения интересующей нас физической величины результат измерения может быть представлен в виде аналитического соотношения, известного как основное уравнение метрологии:

$$A = kA_{\mathrm{O}}, \tag{2.1}$$

где A – значение измеряемой физической величины;

A_{O} – значение величины, принятой за образец;

k – отношение измеряемой величины к образцу.

Наиболее удобен вид основного уравнения метрологии (2.1), если выбранная за образец величина равна единице. При этом параметр k представляет собой числовое значение измеренной величины, зависящее от принятого метода измерения и величины единицы измерения.

2.1.2. Математическая величина

Результатом каждого измерения является действительное число как результат отношения величин одного и того же рода. В математике, включающей в себя исследование количественных закономерностей окружающего нас мира, предметом изучения является отвлеченная *математическая величина*, под которой понимается величина, обладающая свойством принимать числовые значения без учета ее качественного содержания.

Все величины, с которыми приходится иметь дело в математике, делятся на переменные и постоянные. *Переменной величиной* (*переменной*) называют такую величину, которая в рассматриваемых условиях может принимать различные числовые значения. Величина, которая в рассматриваемых условиях не меняет числового значения, называется *постоянной*.

Для наглядности, как было отмечено в первом разделе пособия, действительные числа отображаются точками на числовой оси. Поэтому постоянную величину будем изображать неподвижной точкой на этой оси. Поскольку же значения переменной величины все время меняются, то геометрически будем изображать ее движущейся точкой числовой оси.

Постоянные величины будем обозначать первыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, \ldots$, а переменные величины – последними: x, y, z.

Важной характеристикой переменной величины является *область ее изменения* – множество значений, которое может принимать переменная величина при своем изменении. В дальнейшем область значения будем обозначать прописными буквами латинского алфавита, например X, Y, Z. При этом тот факт, что переменная x изменяется в области X, символически записывается как $x \in X$.

Если каждое последующее значение переменной величины больше ее предыдущего значения, то такая переменная называется *возрастающей*, если же последующее значение меньше предыдущего – *убывающей*. Возрастающие и убывающие переменные величины называются *монотонными*.

В практических приложениях часто используют понятие *абсолютная величина* $|x|$ действительного числа x, под которой понимают неотрицательное число, определяемое следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0; \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

С геометрической точки зрения, абсолютная величина есть длина отрезка ON числовой оси, где N – точка с координатой x.

Отметим без доказательства следующие свойства абсолютной величины:

– неравенство $|x| \leq a$ равносильно двойному неравенству $-a \leq x \leq a$:

$$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a; \tag{2.3}$$

– абсолютная величина суммы двух чисел не превосходит суммы их абсолютных величин:

$$|x + y| \leq |x| + |y|; \tag{2.4}$$

– абсолютная величина разности больше или равна разности абсолютных величин этих чисел:

$$|x-y| \geq |x|-|y|; \tag{2.5}$$

– абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин делимого и делителя:

$$|x/y| = |x|/|y|. \tag{2.6}$$

2.2. Числовые последовательности

До сих пор, говоря о переменной величине, все внимание было уделено лишь множеству тех значений, которые она принимает, например, это множество значений, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$ или $a < x < b$. Однако на практике важным является не только множество значений, принимаемых переменной величиной, но и характер их изменения или, как говорят, характер изменения переменной величины.

Процесс изменения любой переменной величины предполагает определенный порядок в совокупности значений, ею принимаемых, который дает возможность для всякого текущего значения переменной величины x различать значения, предшествующие ему, и значения, следующие за ним: $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots$

Процесс изменения величины может осуществляться как дискретно, так и непрерывно. При дискретном (скачкообразном) изменении переменной величины ее значения следуют друг за другом в определенном порядке и отделены друг от друга определенным интервалом, например $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$.

Если изображать значения переменной величины точками числовой оси (рис. 2.1, *а*), то процесс ее изменения выражается движением точки M, последовательно перескакивающей из положения M_k в положение M_{k+1}, где $k = 1, 2, 3, \dots$

При непрерывном изменении переменной величины переход от одного числового значения к другому осуществляется через все числа промежутка и, следовательно, точка M при переходе из положения

A в положение B пробегает через все точки промежутка (AB) (рис. 2.1, *б*).

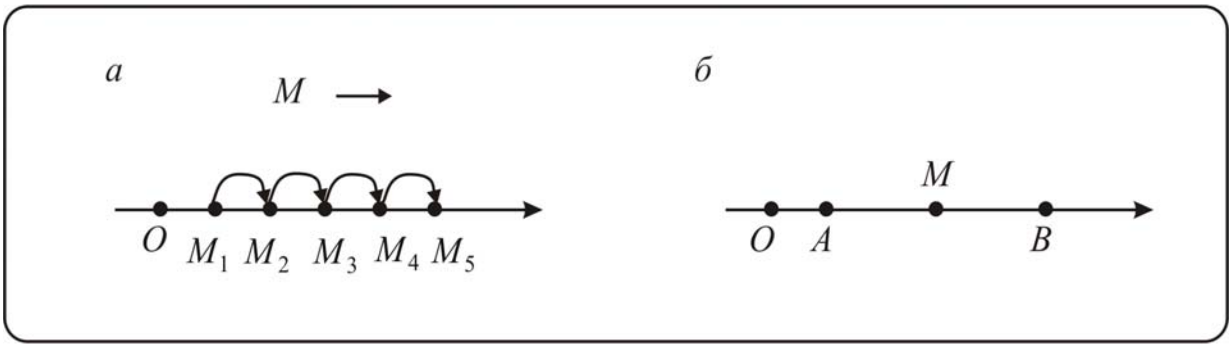


Рис. 2.1. Изменение переменной величины:
а – дискретное, *б* – непрерывное

Интервал, отделяющий друг от друга значения переменной, может задаваться натуральным числом. При этом если по некоторому закону каждому натуральному числу n соответствует определенное число x_n, то говорят, что задана *последовательность чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots$, или что задана переменная x_n, пробегающая последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots$ называются *членами последовательности*. В частности, число x_n называется *общим членом последовательности*. Последовательность с общим членом x_n обычно обозначается символом $\{x_n\}$.

Последовательность может быть задана следующими способами:

– формулой общего члена, например $x_n = \dfrac{1}{n}$;

– рекуррентно, когда дается первый член и указывается способ вычисления n-го члена при помощи предыдущих, например, $x_1 = 0,\ x_n = 2x_{n+1} + 7$.

Различают следующие виды последовательности $\{x_n\}$:

– *возрастающая* (*строго возрастающая*), если каждый ее последующий член больше предыдущего, то есть $x_n > x_{n-1}$;

– *убывающая* (*строго убывающая*), если $x_n < x_{n-1}$;

– *неубывающая*, если $x_n \geq x_{n-1}$;

– *невозрастающая*, если $x_n \leq x_{n-1}$.

Каждая такая последовательность называется *монотонной*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число $M > 0$, такое, что для всех n выполняется неравенство $|x_n| < M$. Геометрически это означает, что все члены последовательности лежат в конечном интервале $(-M, M)$ (рис. 2.2).

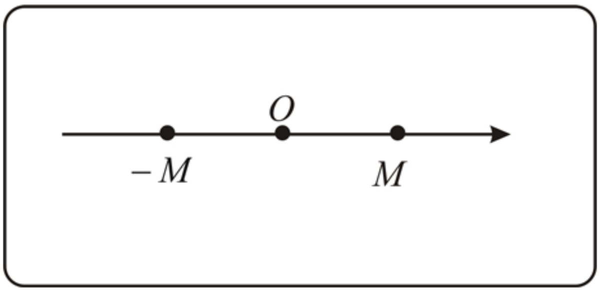


Рис. 2.2. Иллюстрация к ограниченной последовательности

2.3. Предел переменной величины

Пусть x_n есть некоторая переменная величина, пробегающая последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots$.

Может случиться так, что при неограниченном возрастании числа n значения переменной *неограниченно приближаются* к некоторому постоянному числу a. В этом случае говорят, что переменная величина x_n имеет предел a или что последовательность $\{x_n\}$ *стремится* к пределу a. Но поскольку понятия «*неограниченно приближаются»* и «*стремится»* математически неопределенны, то необходимо дать строгое определение предела переменой.

Число a называется *пределом некоторой величины* x_n, если для любого положительного числа ε найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (2.7)$$

То, что число a есть предел переменной величины, записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$. Символ lim составляется из первых трех букв латинского слова *limes* (граница), а запись $n \to \infty$ указывает на тот факт, что число n неограниченно возрастает или стремится к бесконечности.

На практике нахождение пределов существенно облегчается при использовании следующих их свойств (приведем их без доказательства):

- переменная величина может иметь только один предел;
- предел постоянной величины равен самой постоянной;
- если переменная x_n имеет конечный предел, то она ограничена;
- если переменные x_n и y_n имеют своими пределами соответственно числа a и b, причем $x_n \le y_n$ при всех значениях числа n, то $a \le b$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
- переменная величина x_n, заключенная между двумя другими переменными y_n и z_n $(y_n \le x_n \le z_n)$ с общим пределом a, имеет тот же предел;
- монотонная ограниченная переменная величина обязательно имеет предел.

Среди переменных величин, имеющих пределы, выделяют такие переменные, которые стремятся к нулю. Они имеют большое значение и поэтому выделяются в особый класс *бесконечно малых величин*.

Переменная x_n, пробегающая последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots$, называется *бесконечно малой*, если при числе n, стремящемся к бесконечности, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Если использовать определение предела, то (полагая в неравенстве (2.7) $x = 0$) можно дать и определение бесконечно малой величине.

Переменная x_n называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа ε найдется такой номер N, что для всех чисел $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$. Бесконечно малые величины будем обозначать первыми буквами греческого алфавита без наклона, например, α, β, γ.

Заметим, что понятие *бесконечно малая величина* определяет не только размер величины, но и характер ее изменения. Поэтому никакую величину из постоянных величин, как бы мала она ни была, нельзя назвать бесконечно малой (кроме нуля).

Рассмотрим с геометрической точки зрения определение бесконечно малой величины.

Поскольку неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $-\varepsilon \le x_n \le \varepsilon$, то отложим на числовой оси Ox от точки O (начало отчета) вправо и влево отрезок длиной ε, как показано на рис. 2.3. В результате получим отрезок длиной 2ε, серединой которого служит нулевая точка. Совокупность всех точек, лежащих на этом отрезке, назовем ε-*окрестностью точки*.

Из неравенства $-\varepsilon \le x_n \le \varepsilon$ следует, что начиная с некоторого номера $n > N$, все последующие значения переменной x_n должны принадлежать построенной ε-окрестности, как бы мала она ни была (на рис. 2.3 приближение значений переменной показано справа).

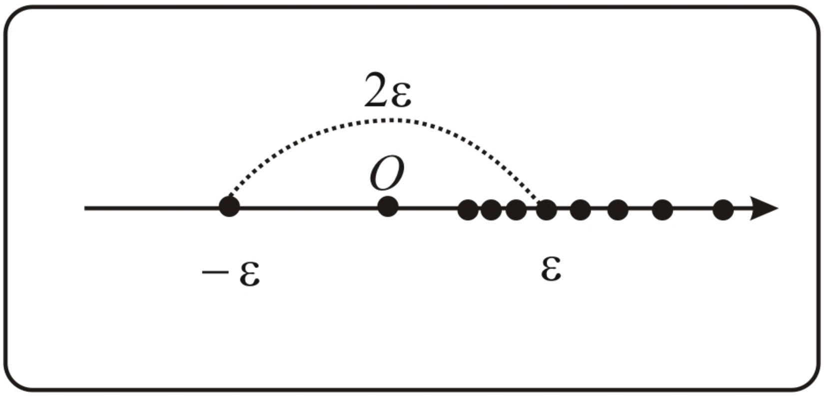


Рис. 2.3. Иллюстрация к понятию «*бесконечно малая величина*»

Бесконечно малая величина обладает следующими свойствами:

- алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая;
- произведение ограниченной величины на бесконечно малую величину есть величина бесконечно малая.

Переменная x_n, пробегающая последовательность значений $x_1, x_2, \dots, x_i \dots$, называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого положительного числа M при устремлении числа n к бесконечности (то есть $n \to \infty$), начиная с некоторого его значения, справедливо неравенство $|x_n| > M$.

Тот факт, что величина x_n является бесконечно большой, выражают словами «величина x_n стремится к бесконечности» или «величина x_n имеет своим пределом бесконечность ∞» и обозначают символически $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Заметим, что между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами существует связь: величина, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая и, наоборот, величина, обратная бесконечно малой, отличной от нуля, есть бесконечно большая.

Установление понятия бесконечно малой величины α_n дает возможность выразить значение переменной x_n через ее предел a, то есть $x_n = a + \alpha_n$.

Действительно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда по определению предела, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, которое означает, что разность $x_n - a$ есть величина бесконечно малая. Обозначая ее символом α_n, получаем $x_n - a = \alpha_n$, или $x_n = a + \alpha_n$.

И обратно, если $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая величина, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Действительно, так как по условию величина α_n – бесконечно малая, то по любому положительному числу $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что при числах $n > N$ будет выполняться условие $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что a есть предел переменной x_n.

Доказанное можно записать в виде следующей формулы:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n. \tag{2.8}$$

Пределы переменной обладают следующими свойствами, которые приведем без доказательства:

– предел алгебраической суммы конечного числа переменных равен алгебраической сумме их пределов:

$$\lim(x_n + y_n + z_n) = \lim x_n + \lim y_n + \lim z_n; \tag{2.9}$$

– предел произведения конечного числа переменных равен произведению их пределов:

$$\lim x_n \cdot y_n = \lim x_n \cdot \lim y_n; \tag{2.10}$$

– предел частного двух переменных равен частному их пределов, если только предел не равен нулю:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}. \tag{2.11}$$

2.4. Предел функции

Для выяснения сущности понятия «*предел функции*» рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 (то есть в некотором интервале, содержащем эту точку), может быть кроме самой этой точки.

Представляя аргумент функции как переменную величину x_n, пробегающую последовательность значений $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots$ $(x_n \neq x_0)$, предположим, что $\lim x_n = x_0$.

При этом функция $y = f(x)$ как зависимая переменная $y_n = f(x_n)$ тоже пробегает последовательность значений $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \; y_3 = f(x_3), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$, которая может либо стремиться к определенному пределу, либо нет.

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при условии $x \to x_0$, если для любой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots$ $(x_n \neq x_0)$ значений аргумента x_n соответствующая последовательность $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$ значений функции y_n имеет пределом число A. Предел функции $y = f(x)$ при условии $x \to x_0$ записывается следующим образом: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

В математической литературе часто приводится другое определение предела функции, которое не опирается на понятие «*последовательность*»: число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если при условии $x \neq x_0$ и $x \to x_0$ для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что выполнение неравенства $|x - x_0| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Различают понятия *предел функции слева* и *предел функции справа*. При этом число A называется *пределом функции справа* (соответственно *слева*) в точке x_0, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что при условии $x_0 < x < x_0 + \delta$

(соответственно при условии $x_0 - \delta < x < x_0$) выполняется неравенство $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$.

Предел функции справа обозначается символом $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0)$, а слева – символом $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ или $f(x_0 - 0)$.

В математике доказано, что для нахождения предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ функции $y = f(x)$ достаточно подставить в выражение функции предельное значение аргумента x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Однако при отыскании пределов некоторых функций, таких, как $f(x)/g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) - g(x)$, $\left|f(x)\right|^{g(x)}$, непосредственное использование этого правила может привести к выражениям вида $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 или 1^∞, называемым *неопределенностями*. Во всех этих случаях отыскание предела функции при условии $x \to x_0$ называется *раскрытием неопределенности*.

Не рассматривая подробно способы раскрытия неопределенностей, приведем пределы некоторых функций, часто встречающихся в теории защиты информации:

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0; \tag{2.12}$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1; \tag{2.13}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \tag{2.14}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2.15}$$

При рассмотрении основных свойств бесконечно малых величин было отмечено, что сумма, разность и произведение конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая. Однако отношение бесконечно малых величин может быть величиной бесконечно малой, бесконечно большой и ограниченной.

Этот факт приводит к необходимости введения следующих новых понятий:

- бесконечно малая величина высшего порядка малости;
- бесконечно малая величина низшего порядка малости;
- бесконечно малые величины одного и того же порядка малости;
- бесконечно малая величина k-го порядка малости.

Бесконечно малая величина β называется *бесконечно малой величиной высшего порядка малости* по сравнению с бесконечно малой величиной α, если $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$.

Бесконечно малая величина β называется *бесконечно малой величиной низшего порядка малости* по сравнению с бесконечно малой величиной α, если $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$.

Бесконечно малые величины α и β называются *бесконечно малыми величинами одного и того же порядка малости* по сравнению с бесконечно малой величиной, если $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$.

Бесконечно малая величина β называется *бесконечно малой величиной k-го порядка малости* относительно бесконечно малой величины α, если $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$.

Рассмотренные ранее понятия позволяют сформулировать определения непрерывной функции, чаще всего применяемые для описания электромагнитных процессов в устройствах хранения, обработки и передачи информации.

Однозначная функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если она удовлетворяет следующим условиям:

- определена в точке $x = x_0$ (то есть значение функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ является конечной величиной);
- бесконечно малому *приращению аргумента* $\Delta x = x - x_0$ соответствует бесконечно малое *приращение функции* $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ (то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$).

Второе условие непрерывности можно переписать иначе:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \right] = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right]. \quad (2.16)$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Это соотношение позволяет дать другую равносильную формулировку определения непрерывности.

Однозначная функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если она удовлетворяет следующим условиям:

– определена в точке $x = x_0$ (то есть значение функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ является конечной величиной);

– ее предел при условии, что $x \to x_0$, совпадает со значением функции в точке $x = x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в промежутке* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

2.5. Производные функций

2.5.1. Понятие производной функции

Решение многих задач, возникающих при анализе и синтезе источников электропитания, связано с определением скорости изменения некоторой зависимой величины относительно другой – независимой переменой. Это приводит к необходимости вычисления однотипных пределов, например, таких, как $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t}$ и $\lim\limits_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta i}$, где $\Delta \Phi, \Delta q, \Delta w, \Delta u$, $\Delta t, \Delta i$ – соответственно приращения магнитного потока, электрического заряда, электрической энергии, напряжения, времени и силы тока.

Отвлекаясь от физического смысла конкретных физических величин, рассмотрим понятие «*предел общего вида*»: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где $y = f(x)$.

Для этого возьмем функцию $y = f(x)$, где x и y – математические величины (без физического содержания).

Дадим первоначальному значению аргумента x (иногда пишут x_0) приращения Δx (знак его безразличен). Тогда и функция y получит приращение Δy. Следовательно, новому значению аргумента $x+\Delta x$ будет соответствовать новое значение функции $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$, а само же приращение функции будет $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2.17)$$

Это отношение представляет собой среднюю скорость изменения величины y по сравнению с величиной x. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают символами y', $f'(x)$ или $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Таким образом, имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad (2.18)$$

или, что то же самое:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2.19)$$

С учетом сказанного, дадим следующее определение производной. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$.

Если такого предела не существует, то говорят, что данная функция в точке x производной не имеет. В случае, когда предел равен бесконечности определенного знака, принято говорить, что существует бесконечная производная.

Функция, имеющая конечную производную, называется *дифференцируемой*, а действие нахождения производной – дифференцированием.

Производной функции можно дать простое геометрическое толкование. Для этого возьмем на кривой AB две точки – M, M_1 и соединим их прямой (секущей) MM_1 (рис. 2.4).

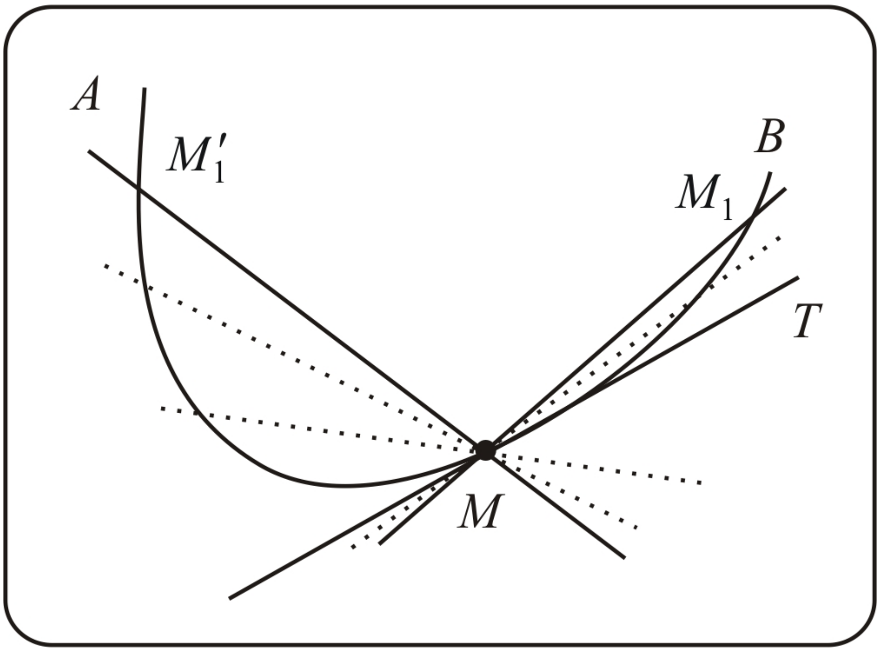


Рис. 2.4. Иллюстрация к понятию
«*касательная к кривой*» в данной точке

Если заставить точку M_1 неограниченно приближаться к точке M, то секущая MM_1 будет вращаться вокруг точки M.

При этом может случиться так, что независимо от направления приближения точки M_1 к точке M (от точки A к точке M или от точки B к точке M) секущая MM_1 (или MM_1') будет стремиться к некоторому своему предельному положению, определяемому прямой MT. Эту прямую MT называют касательной к кривой в данной точке M.

Таким образом, *касательной к кривой AB в ее точке M* называется прямая MT, положение которой совпадает с предельным положением секущей MM_1, когда точка M_1, перемещаясь вдоль кривой, стремится к совпадению с точкой M.

Заметим, что по мере приближения точки M_1 к точке M (когда $\Delta x \to 0$) угол φ, образованный секущей MM_1 с осью Ox, приближается к углу α, образованному касательной MT с осью Ox, то есть $\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi$ (рис. 2.5).

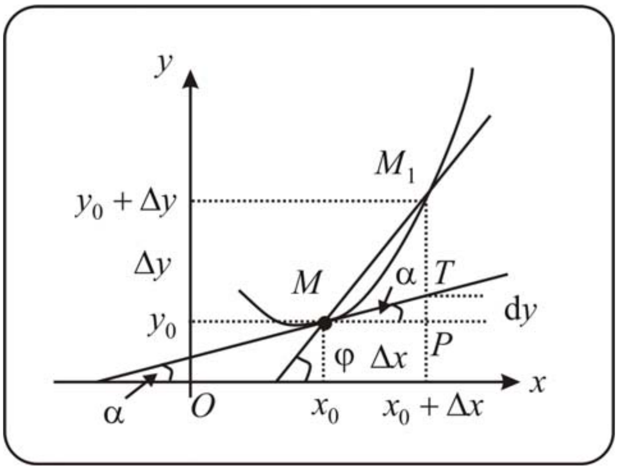


Рис. 2.5. Геометрическое толкование производной

При этом выполняется равенство $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\varphi$. Поскольку, как видно из рис. 2.5, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{2.20}$$

Данные рассуждения указывают на геометрический смысл производной. Производная функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ есть тангенс угла, образованного касательной к графику функции в точке $M\,(x_0, y_0)$ с осью Ox.

Механическое толкование производной приводит к понятию «*скорость изменения одной величины от другой*». Например, *мгновенная скорость поступательного движения* тела в момент времени t определяется как предел отношения перемещения $\Delta\vec{s}$ к промежутку времени Δt, за который произошло это перемещение:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{s}\,'(t). \tag{2.21}$$

Заметим, что задача о скорости может ставиться по отношению к любой переменной величине, изменяющейся со временем.

Так, *сила тока* определяется как предел отношения заряда Δq, переносимого через поперечное сечение проводника за интервал времени Δt, к этому интервалу:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{d}t} = q(t). \tag{2.22}$$

Примером скорости изменения одной величины по отношению к другой является *динамическое сопротивление* нелинейного элемента:

$$R_d = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}i}, \tag{2.23}$$

где u, i – соответственно напряжение, приложенное к элементу, и ток, протекающий по нему.

2.5.2. Производные элементарных функций

Из определения производной функции $f(x)$ можно получить следующее правило ее вычисления:

– вычисляется значение функции, соответствующее первоначальному значению аргумента x;

– первоначальному значению аргумента x дается приращение Δx;

– вычисляется новое значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$;

– вычитается первоначальное значение функции из нового и тем самым определяется приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

– составляется отношение приращения функции к приращению аргумента: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

– находится предел данного отношения при условии, что $\Delta x \to 0$, который дает искомую производную

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.24}$$

Приведенное правило вычисления производной является основным, так как выведено из самого определения производной. Однако пользоваться таким правилом зачастую кропотливо и не всегда удобно. Поэтому на практике используют ранее найденные по приведенному правилу производные основных простейших функций:

$$y = c \quad \Rightarrow \quad y' = 0; \tag{2.25}$$

$$y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1; \tag{2.26}$$

$$y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = nx^{n-1}; \tag{2.27}$$

$$y = u + v - w \quad \Rightarrow \quad y' = u' + v' - w'; \tag{2.28}$$

$$y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'; \tag{2.29}$$

$$y = c \cdot u \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot u'; \tag{2.30}$$

$$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \tag{2.31}$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{x^2}; \tag{2.32}$$

$$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x; \tag{2.33}$$

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x; \tag{2.34}$$

$$y = \mathrm{tg} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{2.35}$$

$$y = \mathrm{ctg} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sin^2 x}; \tag{2.36}$$

$$y = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{2.37}$$

$$y = \arccos x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{2.38}$$

$$y = \operatorname{arctg} x \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}; \tag{2.39}$$

$$y = \operatorname{arcctg} x \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{-1}{1+x^2}; \tag{2.40}$$

$$y = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{x}; \tag{2.41}$$

$$y = \log_a x \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{x \ln a}; \tag{2.42}$$

$$y = e^x \qquad \Rightarrow \qquad y' = e^x; \tag{2.43}$$

$$y = a^x \qquad \Rightarrow \qquad y' = a^x \ln a; \tag{2.44}$$

$$y = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{2.45}$$

2.5.3. Производная сложной функции

В практической деятельности чаще всего приходится пользоваться не простейшими функциями, а сложными. Для определения сложной функции допустим, что переменная y есть функция переменой u, которая, в свою очередь, представляет собой функцию от переменной x, то есть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

Каждому значению аргумента x соответствует определенное значение переменной u. В свою очередь, каждому значению переменной u соответствует определенное значение переменной y. В конечном счете каждому значению переменной x отвечает определенное значение переменной y, то есть y является функцией от аргумента x.

Заметим, что функцию y можно выразить непосредственно через переменную x, если подставить в функцию $y = f(u)$ вместо переменной u ее выражение: $y = f(u) = f[\varphi(x)]$. Такая функция называется *сложной*, или *функцией от функции*. Здесь переменная u является промежуточным аргументом, а переменная x – основным.

На практике для нахождения производной сложной функции применяют теорему, суть которой сводится к следующему. Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'(x)$ в точке x, а функция $f(u)$ – производную $f'(u)$ в соответствующей точке u, то сложная функция $y = f(u) = f[\varphi(x)]$ в точке x также будет иметь производную, равную произведению функций $f(u)$, $\varphi(x)$, то есть $y' = f'(u) \cdot u_x$ или $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, где y'_x, y'_u, u'_x – производные функций $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ по своим аргументам.

Приведенная выше теорема о производной сложной функции позволяет найти правила вычисления их конкретных видов:

$$y = u^n \quad \Rightarrow \quad y'_x = nu^{n-1} \cdot u'_x; \tag{2.46}$$

$$y = \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x; \tag{2.47}$$

$$y = \sin u \quad \Rightarrow \quad y'_x = \cos u \cdot u'_x; \tag{2.48}$$

$$y = \cos u \quad \Rightarrow \quad y'_x = -\sin u \cdot u'_x; \tag{2.49}$$

$$y = \operatorname{tg} u \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x; \tag{2.50}$$

$$y = \operatorname{ctg} u \quad \Rightarrow \quad y'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x; \tag{2.51}$$

$$y = a^u \quad \Rightarrow \quad y'_x = a^n \cdot \ln a \cdot u'_x; \tag{2.52}$$

$$y = e^u \quad \Rightarrow \quad y'_x = e^n \cdot u'_x; \tag{2.53}$$

$$y = \log_a u \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x; \tag{2.54}$$

$$y = \ln u \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x; \tag{2.55}$$

$$y = \arcsin u \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x; \tag{2.56}$$

$$y = \arccos u \qquad \Rightarrow \qquad y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x; \qquad (2.57)$$

$$y = \operatorname{arctg} u \qquad \Rightarrow \qquad y'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x; \qquad (2.58)$$

$$y = \operatorname{arcctg} u \qquad \Rightarrow \qquad y'_x = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x; \qquad (2.59)$$

$$y = cu \qquad \Rightarrow \qquad y'_x = c \cdot u'_x; \qquad (2.60)$$

$$y = \frac{c}{u} \qquad \Rightarrow \qquad y'_x = -\frac{c}{u^2} \cdot u'_x; \qquad (2.61)$$

$$y = u \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad y'_x = u'v + uv'; \qquad (2.62)$$

$$y = \frac{u}{v} \qquad \Rightarrow \qquad y'_x = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (2.63)$$

2.6. Понятие дифференциала функции

Дифференциалом $\mathrm{d}y$ функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение значения производной $f'(x)$ на произвольное приращение Δx аргумента x, то есть

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\Delta x. \qquad (2.64)$$

Пользуясь формулой (2.64), найдем дифференциал функции $y = x$:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = f'(x)\,\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x, \qquad (2.65)$$

то есть дифференциал независимой переменной (аргумента) равен произвольному приращению этой переменной.

Внося в формулу (2.64) значение $\Delta x = \mathrm{d}x$, получаем

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (2.66)$$

то есть дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен произведению производной функции в этой точке на дифференциал независимой переменной.

Из соотношения (2.66) производную $f'(x)$ можно определить как отношение дифференциалов:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{2.67}$$

Отсюда следует, что введенный ранее символ производной $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ можно рассматривать как реальную дробь.

Определение дифференциала функции носит формальный характер, поэтому требует выяснения геометрического и механического смысла этого понятия.

По определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2.68}$$

Согласно формуле (2.8), находим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \tag{2.69}$$

или

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{2.70}$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, приращение функции определяется двумя слагаемыми. Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ при условии, что $\Delta x \to 0$ и $f'(x) \neq 0$, является бесконечно малой величиной одного порядка с величиной Δx (так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x) = f'(x) \neq 0$). Это слагаемое линейно относительно Δx.

Второе слагаемое $\alpha\Delta x$ при условии, что $\Delta x \to 0$, является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем величина Δx ($\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$). Иными словами, при условии $\Delta x \to 0$ второе слагаемое неизмеримо мало по сравнению с первым.

Дифференциал функции $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ называется поэтому главной линейной (относительно бесконечно малой величины Δx) частью приращения функции Δy.

Если теперь в формулу (2.70) вместо выражения $f'(x)\,\Delta x$ поставить дифференциал $\mathrm{d}y$, то получим

$$\Delta y = \mathrm{d}y + \alpha\,\Delta x. \qquad (2.71)$$

Таким образом, приращение и дифференциал функции отличаются друг от друга на бесконечно малую величину более высокого порядка:

$$\Delta y - \mathrm{d}y = \alpha\,\Delta x. \qquad (2.72)$$

При достаточно малом приращении Δx можем записать

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y. \qquad (2.73)$$

Дифференциал функции допускает простое геометрическое истолкование (см. рис. 2.5). На данном рисунке в точке $M(x, y)$ проведена касательная к графику функции $y = f(x)$.

Из треугольника $\Delta\,MPT$ следует, что длина отрезка $PT = f'(x)\,\Delta x$. Следовательно, дифференциал $\mathrm{d}y = PT$. Итак, длина отрезка PT представляет собой дифференциал функции.

Таким образом, в то время как величина Δy есть приращение ординаты кривой при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, дифференциал $\mathrm{d}y$ является приращением ординаты касательной к кривой в точке x при переходе этой точки к точке $x + \Delta x$.

Подобно производной, дифференциалу функции можно дать и механическое истолкование. Пусть функция $y = f(t)$ есть закон движения точки (где t – время). Согласно формуле (2.66), дифференциал пути будет составлять $\mathrm{d}y = f'(t)\,\mathrm{d}t$. Однако производная от пути по времени есть скорость движения v в момент времени t, поэтому справедливо равенство $\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}t$.

Таким образом, дифференциал есть путь, пройденный за время $\mathrm{d}t$ в предположении, что, начиная с данного момента времени t, точка движется равномерно, сохраняя приобретенную скорость.

Следует заметить следующее: так как дифференциал функции получается в результате умножения производной на дифференциал независимой переменной, то в специальных формулах для нахождения дифференциалов надобности нет.

2.7. Приложения производной к нахождению экстремумов функций

Многие задачи, связанные с эффективностью передачи электрической энергии от источника к потребителю, приводят к необходимости решения задачи по нахождению экстремумов функций.

Экстремум – это латинское слово, в переводе на русский язык означает «крайний». Оно объединяет два понятия: *максимум* и *минимум* функции. Заметим, что несмотря на то, что слово *максимум* (*минимум*) в переводе на русский язык означает *наибольший* (*наименьший*), тем не менее, не следует отождествлять такие понятия, как *максимум* (*минимум*) *функции в данном промежутке* и *наибольшее* (*наименьшее*) *значение функции в данном промежутке*.

Считается, что в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет максимум (минимум), если эту точку можно окружить такой малой окрестностью $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, во всех точках которой справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x_0) > f(x))$ при условии, что $x \neq x_0$.

Иначе говоря, максимумом (минимумом) функции называется ее значение, наибольшее (наименьшее) по сравнению с ближайшими соседними значениями.

Максимум и минимум функции принято обозначать соответственно следующими символами: $\max f(x)$, $\min f(x)$.

Согласно определению, под соседними понимаются значения, обязательно взятые по обе стороны от числа x_0, то есть находящиеся в промежутке $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

На рисунке 2.6 непрерывная функция $y = f(x)$, заданная в промежутке $[a, b]$, в точках x_0 и x_2 имеет максимум, а в точках x_1 и x_3 – минимум.

Поскольку функция задана только по одну сторону от точек a и b, то в этих точках функция не имеет ни минимума, ни максимума. Однако в точке a функция достигает наименьшего значения, так как

$f(a) < f(x)$, а в точке b – наибольшего значения, так как $f(b) > f(x)$ для всех значений x из промежутка $[a,b]$.

Для нахождения экстремума функции можно использовать правило, суть которого сводится к следующему:

1. Находится область определения функции $f(x)$.

2. Вычисляется производная $f'(x)$.

3. Определяются точки, «подозрительные» на экстремум, то есть те значения x, при которых производная $f'(x)$ равна нулю или бесконечности, а функция $f(x)$ непрерывна.

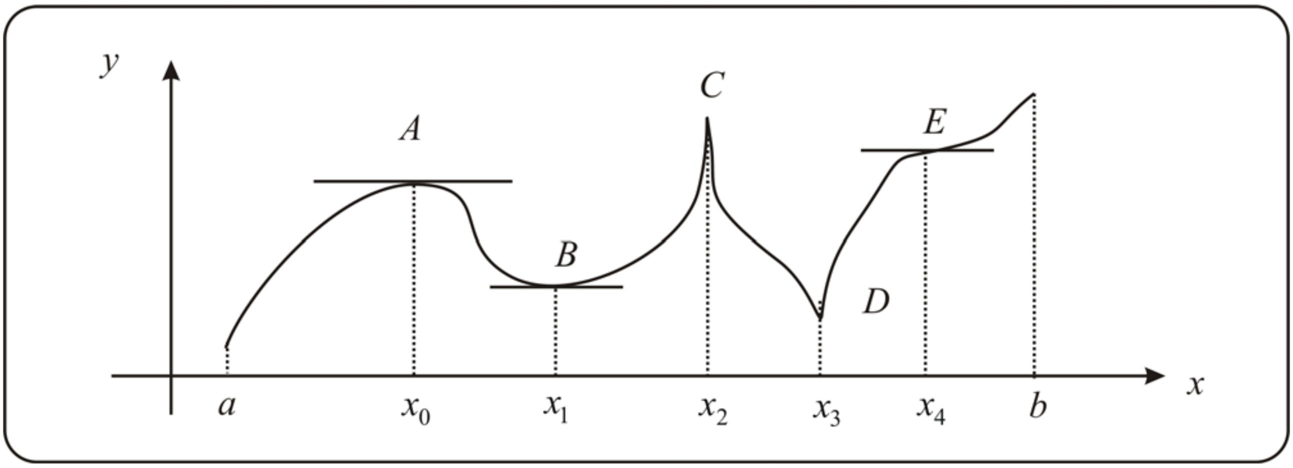


Рис. 2.6. Иллюстрация к понятию «*экстремумы функции*»

Для этого решается уравнение $f'(x) = 0$ или $\frac{1}{f'(x)} = 0$. Все найденные значения n переменной x нумеруются в порядке возрастания: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

4. Исследуется изменение знака производной $f'(x)$ при переходе через точку $x = x_i$. Если производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то в точке $x = x_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ функция $f(x)$ имеет максимум, если с «–» на «+» – в точке $x = x_i$ будет минимум. Если производная $f'(x)$ знака не меняет, это значит, что экстремума нет.

Для определения знака производной слева и справа от точки $x = x_i$ необходимо подставить в выражение производной значение аргумента, сначала меньшее, а затем большее x_i.

В качестве большего и меньшего значений берутся точки, лежащие между рассматриваемой точкой $x = x_i$ и соседними критическими точками x_{i-1} и x_{i+1}.

5. Вычисляются максимальные и минимальные значения функции, для чего в выражение функции $f(x)$ подставляются значения $x = x_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Пример. Требуется выяснить, каково должно быть соотношение между сопротивлением нагрузки $R_{\text{н}}$ и внутренним сопротивлением генератора постоянного тока r_0, чтобы в сопротивлении нагрузки выделялась максимальная мощность (рис. 2.7).

Решение. Если нагрузка $R_{\text{н}}$ подключена к источнику постоянного напряжения, то через нее пойдет ток $I = \dfrac{E}{R + r_0}$ и в ней будет выделяться мощность

$$P = I^2 R = \frac{E}{(R + r_0)^2} R. \tag{2.74}$$

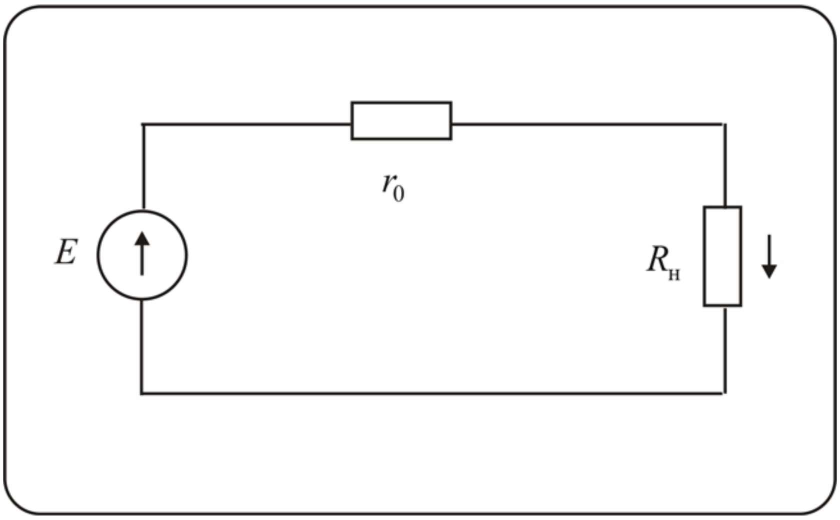


Рис. 2.7. Передача энергии от источника постоянного напряжения к нагрузке

Определим первую производную мощности P по сопротивлению R и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(R + r_0)^2 - 2R(R + r_0)}{(R + r_0)^2} = 0. \tag{2.75}$$

Решая уравнение (2.75), получаем $R = r_0$. Нетрудно убедиться в том, что данное соотношение соответствует максимуму функции $P = f(R)$, так как ее вторая производная отрицательная: $\dfrac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}^2 R} < 0$.

3. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

Бесконечным рядам принадлежит важная роль в математике и ее приложениях к исследованию электромагнитных процессов, протекающих в системах и устройствах хранения, обработки и передачи информации. С их помощью вычисляются с любой степенью точности значения функций, описывающих физические величины, характеризующие качество производимой, преобразуемой, передаваемой и потребляемой электрической энергии.

3.1. Определение ряда

Пусть задана по определенному закону бесконечная числовая последовательность $u_1, u_{2,\ldots,}\ u_n, \ldots$. Выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots u_n + \ldots \tag{3.1}$$

называется *числовым рядом*, а числа $u_1, u_{2,\ldots,}\ u_n, \ldots$ – *членами ряда*. Член u_n ряда (3.1), стоящий на n-м месте, считая от начала, называется *общим членом ряда*. Ряд считается заданным, если известен общий член его, выраженный как функция номера n.

Сумма первых n членов ряда (3.1)

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n \tag{3.2}$$

называется n-й *частной* (*частичной*) суммой этого ряда.

Очевидно, что первая, вторая и т. д. частные суммы ряда:

$$s_1 = u_1, \tag{3.3}$$

$$s_2 = u_1 + u_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

образуют новую последовательность чисел

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \qquad (3.4)$$

При неограниченном возрастании числа n возможны следующие варианты изменения величины s_n:

- величина s_n стремится к определенному конечному пределу;
- величина s_n возрастает неограниченно по абсолютной величине;
- величина s_n не возрастает неограниченно, но и не стремится к определенному пределу.

Если при устремлении числа n к бесконечности ($n \to \infty$) существует конечный предел последовательности частных сумм

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \qquad (3.5)$$

то ряд (3.1) называется *сходящимся*, а число s – *суммой ряда*:

$$s = u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots \qquad (3.6)$$

Если при устремлении числа n к бесконечности ($n \to \infty$) последовательность частных сумм не имеет предела или ее предел равен бесконечности, то ряд (3.1) называется *расходящимся*. Такой ряд не имеет суммы.

Для обозначения ряда применяют сокращенную запись, полагая, что

$$u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \qquad (3.7)$$

В частности, когда ряд сходится и его сумма равна s, применяется запись

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s . \qquad (3.8)$$

3.2. Функциональные ряды

Функциональным рядом называется ряд, членами которого являются функции одной или нескольких переменных, определенные на некотором множестве. Например, ряд, члены которого есть функции одной переменной t на отрезке $[a,b]$, можно записать так:

$$u_1(t)+u_2(t)+\ldots\cdots+u_n(t)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t). \qquad (3.9)$$

Суммы вида

$$s_n(t)=u_1(t)+u_2(t)+\ldots\cdots+u_n(t) \qquad (3.10)$$

называются *частными суммами* данного функционального ряда.

При каждом фиксированном значении $t=t_0$ из области определения функции $u_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ функциональный ряд (3.9) становится числовым рядом:

$$u_1(t_0)+u_2(t_0)+\ldots\cdots+u_n(t_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t_0). \qquad (3.11)$$

В зависимости от значения $t=t_0$ числовой ряд (3.11) может оказаться сходящимся или расходящимся.

Совокупность всех значений независимой переменной t, для которых ряд (3.11) сходится, называется *областью сходимости функционального ряда* (3.9).

Очевидно, что в области сходимости ряда (3.9) его n-я частная сумма $s_n(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(t)$, сумма ряда $s(t)=\lim\limits_{n\to\infty}s_n(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$ и остаток $r_n(t)=s(t)-s_n(t)$ представляют собой функции от независимой переменной t.

Из функциональных рядов наибольший интерес в электротехнических дисциплинах представляют степенные и тригонометрические ряды.

Степенным рядом, или *рядом по степеням разности,* называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (3.12)$$

где a и коэффициенты ряда $a_1, a_2, \ldots \cdots a_n, \ldots$ – постоянные числа.

Если $a = 0$, то получим степенной ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (3.13)$$

называемый рядом по степеням x. Заметим, что ряд (3.12) приводится к ряду (3.13) с помощью подстановки выражения $x - a = t$.

На практике степенные ряды применяются для вычисления с необходимой степенью точности значений некоторых функций. Для этого применяют известную теорему разложения заданной функции в степенные ряды, суть которой заключается в следующем.

Если в некоторой окрестности точки a, то есть в некотором интервале $(a-r, a+r)$, функция $f(x)$ есть сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \qquad (3.14)$$

то коэффициенты этого ряда выражаются через функцию $f(x)$ и число a следующим образом:

$$a_0 = f(a), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (3.15)$$

Для доказательства сказанного, последовательно дифференцируя тождество (3.14), получим тождества, справедливые при всех значениях x из интервала сходимости функции:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots;$$

$$f''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a)^2 + \ldots + (n-1)na_n(x-a)^{n-2} + \ldots;$$

$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + \ldots$$

$$\ldots + (n-2)\cdot(n-1)\, na_n(x-a)^{n-3} + \ldots;$$

……………………………………………………………………..

$$f^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\, na_n + 2\cdot 3\cdot 4\ldots n\,(n+1)\, a_{n+1}\,(x-a) + \ldots\ .$$

Полагая в этих тождествах $x = a$, получим:

$$a_0 = f(a),\quad a_1 = f'(a),\quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!},\quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов ряда в равенство (3.14), будем иметь

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,. \qquad (3.16)$$

Степенной ряд вида (3.16) независимо от того, сходится ли он и чему равна его сумма, называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$. В частном случае при значениях $a = 0$ ряд (3.16) принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (3.17)$$

и называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

Теорема, доказанная ранее, позволяет сформулировать правило разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена, суть которого сводится к следующему:

– находятся производные функции $f(x)$: $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$
$\ldots, f^{(n)}(x), \ldots$;

– вычисляются значения функции $f(x)$ и ее производных в точке $x = 0$, то есть $f'(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots$;

– определяются коэффициенты ряда Маклорена $a_0 = f(0)$,

$$a_0 = f(0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

– составляется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ для данной функции;

– доказывается, что в интервале сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ его остаток $R_n(x) = f(x) - s_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Применяя данное правило, разложим наиболее часто встречающиеся функции в степенные ряды:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots; \tag{3.18}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \tag{3.19}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.20}$$

3.3. Ряды с комплексными членами

Рассмотрим последовательность комплексных чисел:

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, \ldots, z_n = x_n + iy_n, \ldots, \tag{3.21}$$

которую сокращенно будем обозначать символом $\{z_n\}$.

Постоянное число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется пределом последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, если для произвольно малого положительного числа ε существует такое положительное число N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Иначе говоря, последовательность $|z_n - z_0|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ должна быть бесконечно малой: $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$. Геометрически это означает, что расстояние между точками z_0 и z_n стремится к нулю при $n \to \infty$ (рис. 3.1).

Предел последовательности комплексных чисел обозначается символами $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ или $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$.

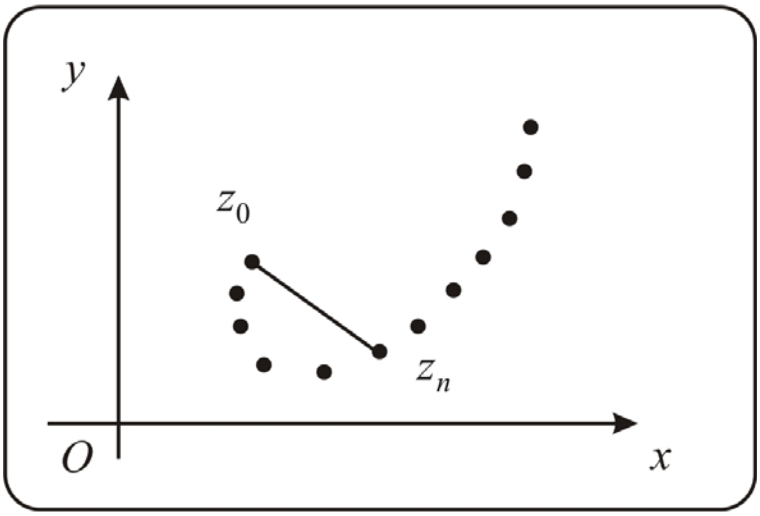


Рис. 3.1. Иллюстрация к пределу последовательности комплексных чисел

Очевидно, что соотношение $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$ равносильно двум соотношениям (в вещественной области): $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, при $n \to \infty$.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0$, то легко доказываются следующие их основные свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} cz_n = c \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, где c – фиксированное комплексное число;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} w_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(z_n w_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} z_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} w_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{w_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} w_n\neq 0$.

Ряд с комплексными числами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1+z_2+\ldots\ldots+z_n+\ldots \tag{3.22}$$

называется *сходящимся*, если последовательность его частных сумм $\{s_n\}=z_1+z_2+\ldots\ldots+z_n \quad (n=1, 2, \ldots)$ стремится к конечному пределу, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$, где s – число, называемое суммой ряда $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n=z_1+z_2+\ldots\ldots+z_n+\ldots$.

Если же последовательность $\{s_n\}=z_1+z_2+\ldots\ldots+z_n \quad (n=1, 2, \ldots)$ не имеет конечного предела, то ряд (3.22) называется *расходящимся*.

Вопрос о сходимости рядов с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_n+iy_n\right)$ сводится к изучению сходимости рядов с вещественными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ на основе известной теоремы, суть которой состоит в следующем.

Для сходимости ряда (3.22) с комплексными членами необходимо и достаточно, чтобы сходились два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ с вещественными членами.

3.4. Степенные ряды в комплексной области

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0+c_1 z+c_2 z^2+\ldots+c_n z^n+\ldots, \tag{3.23}$$

где c_i – комплексные постоянные (коэффициенты ряда), называется *степенным рядом в комплексной области*.

С помощью степенных рядов в комплексной области можно обобщить понятия некоторых элементарных функций на случай комплексной переменной и получить разложения следующих функций комплексной переменной e^z, $\sin z$, $\cos z$:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \qquad (3.24)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \qquad (3.25)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}. \qquad (3.26)$$

Подставляя в равенство (3.24) iz вместо z и производя соответствующую группировку членов ряда, получим

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} \ldots =$$

$$= 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = \cos z + i \sin z. \qquad (3.27)$$

Таким образом, получаем формулу $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, известную под названием *формулы Эйлера*.

3.5. Обобщенный ряд Фурье

Одной из важнейших задач, рассмотренных в предыдущем разделе пособия, было представление любой функции $f(x)$ суммой степенного ряда:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (3.28)$$

Практическая ценность такого представления обусловлена тем, что вычисление значений произвольной функции $f(x)$ при заданном значении аргумента x сводится, по существу, к работе с многочленом

$$s_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \tag{3.29}$$

то есть к простейшим арифметическим операциям – сложению и умножению. При этом значения функции $f(x)$ могут быть найдены с любой степенью точности.

В данном разделе пособия рассмотрим вопрос о возможности представления сложной периодической функции $f(x \pm l) = f(x)$ в виде суммы простейших периодических функций. С этой целью возьмем систему функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots . \tag{3.30}$$

Эта система называется *ортогональной* на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ при } n \neq m. \tag{3.31}$$

При этом предполагается, что

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x \neq 0, \tag{3.32}$$

то есть никакая из функций системы (3.30) тождественно не равна нулю. Условие (3.31) выражает попарную ортогональность функций системы (3.30). Величина

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x} \tag{3.33}$$

называется нормой функции $\varphi_n(x)$.

Функция $\varphi_n(x)$, для которой выполняется условие

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{3.34}$$

называется *нормированной*, а система функций (3.30), в которой каждые две различные функции взаимно ортогональны, называется *ортонормированной системой*.

В математике доказано, что если функции $\varphi_n(x)$ непрерывны, то произвольная функция $f(x)$, для которой выполняется условие

$$\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x < 0, \tag{3.35}$$

может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots, c_n\varphi_n(x) + \ldots. \tag{3.36}$$

Отметим, что интеграл (3.35) вычисляется по области определения функции $f(x)$.

Умножим обе части уравнения (3.36) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем в пределах a, b. Все слагаемые вида $\int\limits_a^b c_m\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$ при $m \neq n$ обращаются в нуль в силу ортогональности функций $\varphi_m(x)$ и $\varphi_n(x)$. В правой части остается одно слагаемое

$$\int\limits_a^b c_n\varphi_n(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = c_n\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = c_n\|\varphi_n\|^2, \tag{3.37}$$

что позволяет написать

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = c_n\|\varphi_n\|^2. \tag{3.38}$$

Отсюда следует соотношение

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.39}$$

Ряд (3.36), в котором коэффициенты c_n определены по формуле (3.39), называется *обобщенным рядом Фурье* по данной системе

$\varphi_n(x)$. Совокупность коэффициентов c_n называется *спектром сигнала* (функции) $f(x)$ в ортогональной системе $\varphi_n(x)$ и полностью определяет эту функцию.

Обобщенный ряд Фурье обладает следующим важным свойством: при заданной системе функций $\varphi_n(x)$ и фиксированном числе слагаемых ряда (3.36) он обеспечивает наилучшую аппроксимацию (в смысле минимума среднеквадратической ошибки) данной функции $f(x)$. Это означает, что среднеквадратическая ошибка, под которой подразумевается величина

$$M = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n \right]^2 \mathrm{d}x, \tag{3.40}$$

достигает минимума, когда коэффициенты ряда $a_n = c_n$.

Для системы функций (3.30), принимающих комплексные значения, условие ортогональности, квадрат нормы функции и коэффициенты Фурье определяются, соответственно, следующими выражениями:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m^*(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ при } n \neq m; \tag{3.41}$$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_n^*(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x; \tag{3.42}$$

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x)\,\varphi_n^*(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.43}$$

В выражениях (3.41) – (3.43) символ $\varphi^*(x)$ обозначает функцию, комплексно-сопряженную функции $\varphi(x)$.

4. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Под *интегралом* понимается объединение двух тесно связанных понятий: неопределенного и определенного интеграла [1].

Неопределенный интеграл – это совокупность первообразных функций, имеющих одну и ту же производную. В математике его принято обозначать символом $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Определенный интеграл – это предел интегральных сумм для данной функции при неограниченном измельчении разбиения множества, по которому производится интегрирование [1]. Разновидностями определенного интеграла являются кратные и криволинейные интегралы.

Кратный интеграл – это определенный интеграл от функции нескольких переменных, в котором интегрирование производится по n-мерному множеству [1].

Криволинейный интеграл – это определенный интеграл от функции нескольких переменных, в котором интегрирование производится по заданной дуге кривой (криволинейный интеграл первого рода) либо по ее проекциям на координатные оси (криволинейный интеграл второго рода) [1]. Здесь под *кривой* понимается множество точек N, координаты которых суть функции одного действительного параметра, заданные на отрезке или на всей числовой оси, а под *дугой* – часть кривой, заключенной между двумя любыми ее точками. При этом если все точки кривой лежат в плоскости, то ее называют *плоской*, иначе – *пространственной*.

4.1. Понятие и основные свойства неопределенного интеграла

Понятие «*неопределенный интеграл*» опирается на понятие «*первообразная функция* $F(x)$». Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если ее производная есть функция $f(x)$, то есть

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}. \qquad (4.1)$$

Заметим, что любая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество первообразных. Действительно, поскольку производная постоянной величины равна нулю, то всякая функция, представленная выражением $F(x)+C$, где C – постоянная величина, является первообразной.

Общий вид первообразной функции $F(x)+C$ выражения $f(x)\,\mathrm{d}x$ [или данной функции $f(x)$] называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Заметим, что постоянное слагаемое C подразумевается включенным в это обозначение.

В данной записи символ $f(x)\,\mathrm{d}x$ называется подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией, а x – переменной интегрирования.

Нахождение (разыскание) неопределенного интеграла называется *интегрированием*. Оно имеет следующее геометрическое истолкование. Пусть $f(x)$ – данная непрерывная функция, а $F(x)$ – какая-либо ее первообразная, график которой показан на рис. 4.1 линией PQ.

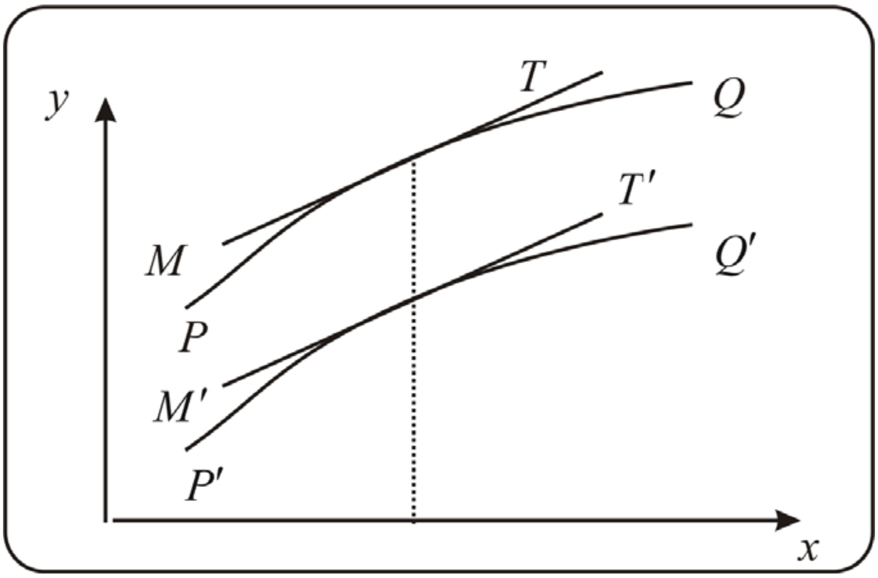


Рис. 4.1. Геометрическое истолкование интегрирования

Если $F'(x)$ – другая первообразная той же функции $f(x)$, график которой показан линией $P'Q'$, то угловые коэффициенты касательных MT и $M'T'$ в точке x должны быть одинаковы, то есть $MT \,||\, M'T'$. График первообразной функции $F(x)$ называется *интегральной линией функции* $f(x)$. Очевидно, что две любые интегральные линии отстоят друг от друга (по вертикали) на постоянное расстояние.

Без доказательства приведем основные свойства неопределенного интеграла [6]:

1. Знак дифференциала перед знаком интеграла уничтожает последний:

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

3. Знак интеграла перед знаком дифференциала уничтожает последний, но при этом вводится произвольное постоянное слагаемое:

$$\int \mathrm{d}\, f(x) = f(x) + C. \tag{4.4}$$

4. Интеграл алгебраической суммы равен сумме интегралов от каждого слагаемого в отдельности:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots f_n(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\,\mathrm{d}x \pm \ldots \int f_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

Используя рассмотренные свойства, интегрирование можно легко свести к выражениям, которые получаются из формул дифференцирования:

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1); \tag{4.6}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C; \tag{4.7}$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C; \tag{4.8}$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C; \tag{4.9}$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C; \tag{4.10}$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C; \tag{4.11}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg} x + C; \tag{4.12}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg} x + C; \tag{4.13}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C; \tag{4.14}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C; \tag{4.15}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg} x + C; \tag{4.16}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C; \tag{4.17}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} \,\mathrm{d}x = \ln \left| x + \sqrt{a^2 \pm x^2} \right| + C; \tag{4.18}$$

$$\int \mathrm{tg} x \,\mathrm{d}x = -\ln \left| \cos x \right| + C; \tag{4.19}$$

$$\int \mathrm{ctg} x \,\mathrm{d}x = -\ln \left| \sin x \right| + C; \tag{4.20}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sinx}} \,\mathrm{d}x = -\ln \left| \mathrm{tg} \frac{x}{2} \right| + C; \tag{4.21}$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x = -\ln \left| \mathrm{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right| + C; \tag{4.22}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C. \tag{4.23}$$

4.2. Интегральные суммы

Интегральной называется сумма, которая определяется функцией $y = f(N)$, множеством S (где функция $f(N)$ определена), разбиением этого множества на конечное число частей S_k и выбором в каждой из этих частей по точке N_k [1].

Она состоит из слагаемых вида $f(N_k)\,\mathrm{mes}\,S_k$, где $\mathrm{mes}\,S_k$ – *мера* множества S_k, под которой будем понимать обобщенное понятие таких величин, как длина, площадь и объем, определяемое неотрицательной аддитивной функцией множества, равной нулю на пустом множестве.

При определении интегралов будем использовать следующие интегральные суммы:

- *интегральную сумму С. Римана*

$$f(N_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(N_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{4.24}$$

определяемую путем разбиения промежутка интегрирования $[a, b]$ на частичные промежутки точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$, произвольным выбором точек N_k в этих промежутках и использованием в качестве меры длины промежутков;

- *интегральную сумму С. Коши*

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \tag{4.25}$$

в которой в качестве точек N_k выбираются начальные точки частичных промежутков.

4.2.1. Одномерная интегральная сумма

Одномерной интегральной суммой для функции $f(N) = f(x)$ по промежутку $[a, b]$, где N – точка числовой оси x, называется сумма

$$\sum_{i=1}^{k} f(N_i)\Delta x_i, \tag{4.26}$$

составленная по следующему правилу [2]:

1. Заданный промежуток $[a, b]$ числовой оси x делится на k элементарных промежутков $[\Delta x_i]$ точками $x_1 < x_2 < \cdots$ $\cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots x_{k-1}$ (рис. 4.2). Для общности записи полагается $a = x_0, b = x_k$ (здесь символом Δx_i обозначим длину промежутка $[\Delta x_i]$, которую в дальнейшем будем обозначать теми же буквами, что и промежуток, но без скобок).

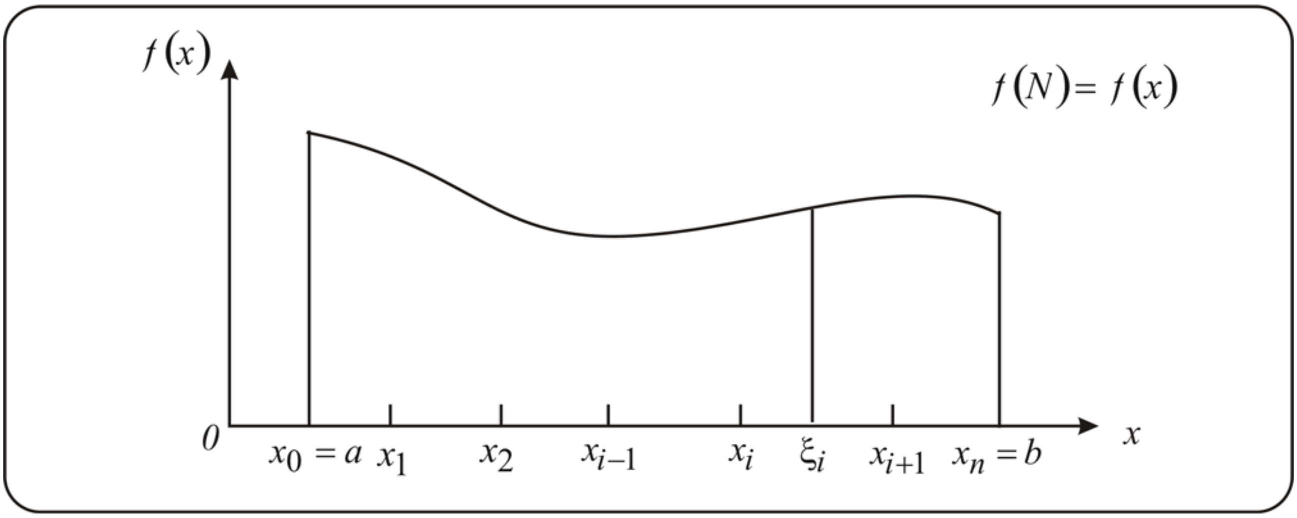


Рис. 4.2. Составление одномерной интегральной суммы

2. В каждом из этих промежутков произвольным образом выбираются точки $N_1, N_2, \ldots, N_k$ и вычисляются значения $f(N_i)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ , k)$ функции $f(N) = f(x)$.

3. Составляются k попарных произведений $f(N_i)\,\Delta x_i$.

4. Складываются все эти произведения по всем значениям i: $\sum\limits_{i=1}^{k} f(N_i)\Delta x_i$.

4.2.2. Двухмерная интегральная сумма

Двухмерной интегральной суммой для функции $f(N) = f(x, y)$, где N – точка плоскости с координатами x, у, называется сумма

$$\sum_{i=1}^{k} f(N_i)\Delta\sigma_i\,, \tag{4.27}$$

составленная по следующему правилу (рис. 4.3) [2]:

1. Область (σ) плоскости произвольным образом разбивается кривыми на k элементов с площадями $\Delta\sigma$; $\sum_{i=1}^{k} \Delta\sigma_i = \sigma$ (здесь буквой σ обозначена площадь области (σ), которую в дальнейшем будем обозначать той же буквой, что и область, но без скобок).

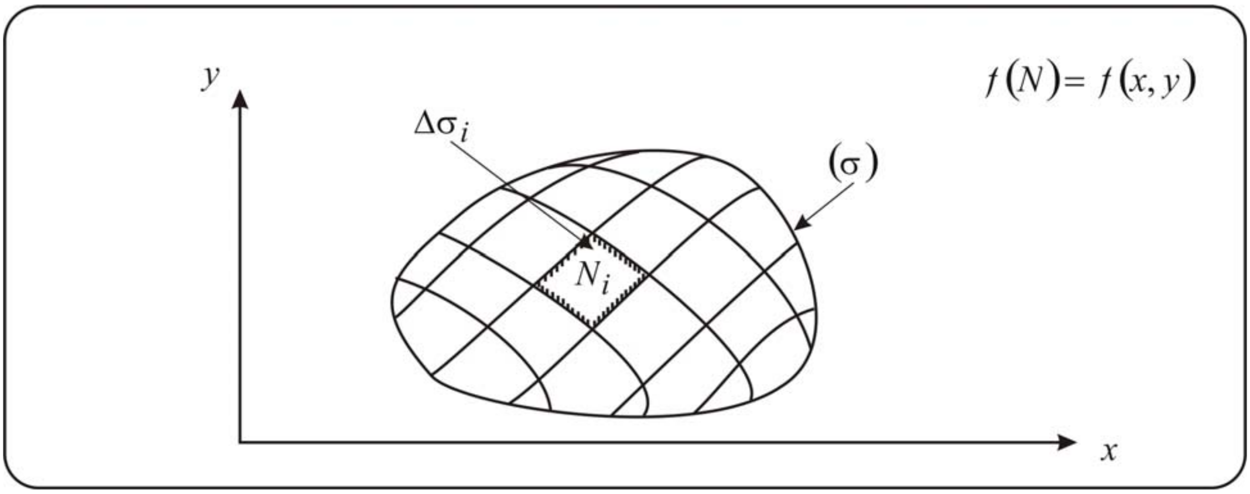


Рис. 4.3. Составление двухмерной интегральной суммы

2. В каждой из элементарных площадок выбирается одна произвольная точка N_i и вычисляется значение $f(N_i)$ функции $f(N) = f(x, y)$.

3. Составляются k произведений $f(N_i) \cdot \Delta\sigma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$.

4. Все полученные таким образом произведения складываются по всем значениям i: $\sum_{i=1}^{k} f(N_i)\, \Delta\sigma_i$.

4.2.3. Трехмерная интегральная сумма

Трехмерной интегральной суммой для функции $f(N) = f(x, y, z)$, где N – точка области (V) трехмерного пространства с координатами x, y, z, называется сумма

$$\sum_{i=1}^{k} f(N_i)\, \Delta V_i , \tag{4.28}$$

составленная по следующему правилу (рис. 4.4) [2]:

1. Область (V) трехмерного пространства произвольным образом разбивается на k элементарных частей (ΔV_i) $(i = 1, 2, \dots, k)$.

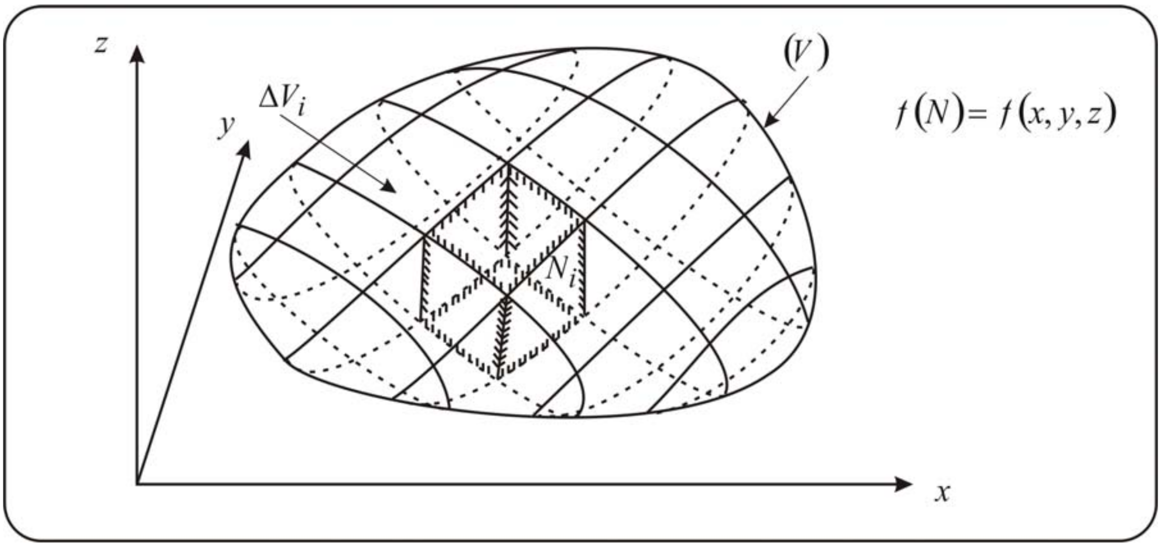


Рис. 4.4. Составление трехмерной интегральной суммы

2. В каждой элементарной части (ΔV_i) берется произвольная точка N_i и вычисляется значение $f(N_i)$ функции $f(N) = f(x, y, z)$.

3. Составляются k попарных произведений $f(N_i)\,\Delta V_i$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, где ΔV_i – объем i-й элементарной области (ΔV_i).

4. Все эти произведения складываются по всем значениям i: $\sum\limits_{i=1}^{k} f(N_i)\,\Delta V_i$.

4.3. Кратные интегралы

4.3.1. Определенный интеграл от функции одной переменной

Определенным интегралом от функции одной переменной $f(N) = f(x)$ называется предел одномерной интегральной суммы, вычисленной при условии, что наибольшая из длин $\max \Delta x$ промежутков $[\Delta x_1], [\Delta x_2], \cdots, [\Delta x_n]$ стремится к нулю (см. рис. 4.2) [2]:

$$\int_a^b f(N)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\max \Delta x \to 0 \\ k \to \infty}} \sum_{i=1}^{k} f(N_i)\,\Delta x_i . \qquad (4.29)$$

Геометрическое толкование определенного интеграла: определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a,b]$ оси Ox, кривой $y=f(x)$ и прямой $x=a, x=b$.

Физическое толкование определенного интеграла: определенный интеграл представляет собой массу отрезка $[a,b]$, если подынтегральная сумма является линейной плотностью в точке, то есть $f(N)=f(x)$.

Линейной плотностью $f(N)=f(x)$ называется предел отношения $\frac{\Delta m}{\Delta x}$, где Δm – масса промежутка $[\Delta x]$, Δx – длина этого промежутка, вычисленный при устремлении длины промежутка к нулю (при стягивании элемента $[\Delta x]$ в точку N):

$$f(N)=\lim_{(\Delta x)\to N}\frac{\Delta m}{\Delta x}. \tag{4.30}$$

4.3.2. Двукратный интеграл

Двойным (*или двукратным*) *интегралом от функции* двух переменных $f(N)=f(x,y)$ по плоской области (σ) называется предел двухмерной интегральной суммы, вычисленный при условии, что наибольший из диаметров δ элементарных площадок $(\Delta\sigma_i)$ стремится к нулю (см. рис. 4.3):

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(N_i)\Delta\sigma_i. \tag{4.31}$$

Геометрическое толкование двойного интеграла: двойной интеграл есть объем цилиндрического тела, ограниченного снизу плоской областью (σ), а сверху – поверхностью $z=f(x,y)$.

Физическое толкование двойного интеграла: двойной интеграл представляет собой массу плоскости, если подынтегральная сумма является поверхностной плотностью в точке, то есть $f(N)=f(x,y)$.

Поверхностной плотностью $f(N)=f(x,y)$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta m}{\sigma}$, где Δm – масса элемента (σ), σ – площадь этого элемента, вычисленный при устремлении площади к нулю (при стягивании элемента в точку N):

$$f(N)=\lim_{(\sigma)\to N}\frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{4.32}$$

4.3.3. Тройной интеграл

Тройным интегралом от функции трех переменных $f(N)=f(x,y,z)$ по области (V) трехмерного пространства называется предел трехмерной интегральной суммы, вычисленной при условии, что наибольший из диаметров δ областей (ΔV_i) стремится к нулю (см. рис. 4.4):

$$\iiint\limits_{(V)} f(N)\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(N_i)\;\Delta V_i\,. \tag{4.33}$$

Физическое толкование тройного интеграла: тройной интеграл есть масса трехмерного тела (V) переменной плотности, если под функцией $f(N)$ понимать объемную плотность вещества как функцию точки, то есть $f(N)=f(x,y,z)$.

Объемной плотностью $f(N)=f(x,y,z)$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta m}{\Delta V}$, где Δm – масса элемента (ΔV), ΔV – объем этого элемента, при устремлении объема к нулю (при стягивании элемента в точку N), то есть

$$f(N)=\lim_{(\Delta V)\to N}\frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{4.34}$$

4.3.4. Поверхностный интеграл первого рода

Поверхностным интегралом первого рода называется определенный интеграл от функции трех переменных, у которого предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta S_i \tag{4.35}$$

вычисляется при условии, что наибольший из диаметров δ всех частей пространственной поверхности (S) стремится к нулю:

$$\iint\limits_{(S)} f(N)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta S\,. \quad (4.36)$$

Интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{k} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta S_i$ составляется по следующим правилам (рис. 4.5):

1. Пространственная поверхность (S) произвольным образом разбивается на части (ΔS_i) $\left(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k\right)$ с площадями ΔS_i.

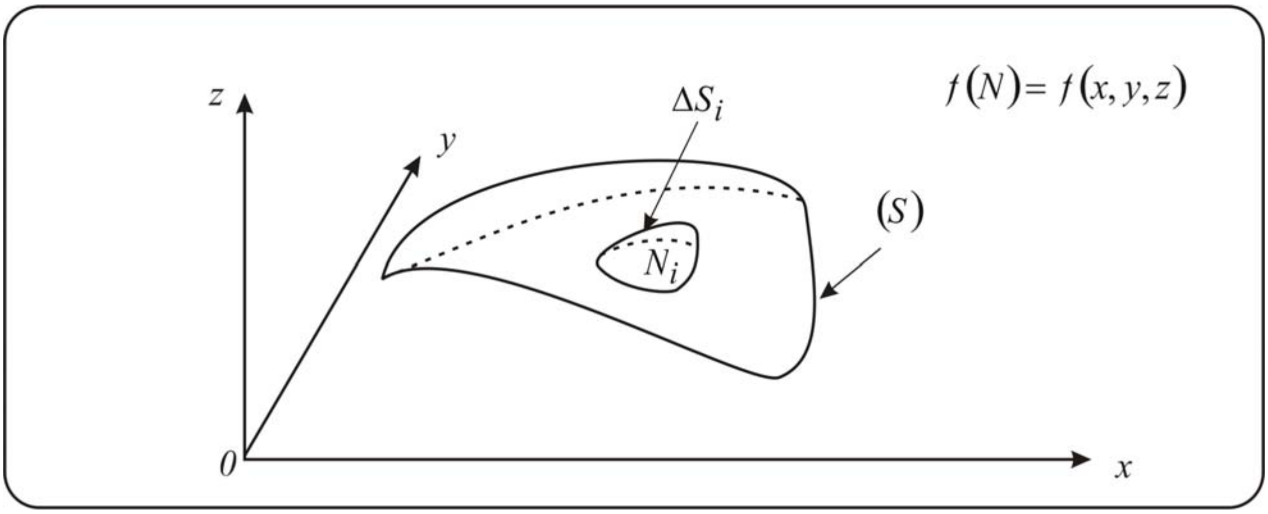


Рис. 4.5. Определение поверхностного интеграла

2. В каждой части области берется произвольная точка $N_i(x_i,y_i,z_i)$ и вычисляется значение $f(N_i)=f(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,\ldots,k)$ функции $f(x,y,z)$.

3. Составляются произведения $f(N_i)\cdot\Delta S_i = f(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta S_i$ по всем значениям i.

4. Данные произведения суммируются по всем элементам:

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta S_i\,.$$

Физический смысл поверхностного интеграла: поверхностный интеграл есть масса материальной оболочки (масса, распределенная по поверхности), если подынтегральная сумма является поверхностной плотностью в точке.

4.4. Криволинейные интегралы

4.4.1. Криволинейный интеграл первого рода

Криволинейным интегралом первого рода от функции трех переменных $f(M)=f(x,y,z)$ называется определенный интеграл, в котором интегрирование производится по заданной пространственной дуге. Он является пределом интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{k} f(N_i)\,\Delta l_i\,, \qquad (4.37)$$

вычисленной при условии, что наибольшая из длин λ отрезков (Δl_i) дуги L пространственной кривой стремится к нулю:

$$\int\limits_{(L)} f(N)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{(AB)} f(N)\,\mathrm{d}l = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(N_i)\,\Delta l_i\,. \qquad (4.38)$$

Интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{k} f(N_i)\,\Delta l_i$ составляется следующим образом (рис. 4.6):

1. Пространственная дуга (L) произвольным образом разбивается на k частей (Δl_i) точками $M_0, M_1, \ldots, M_k$, причем точка M_0 совпадает с точкой *A*, а точка M_k – с точкой *B*.

2. На каждом элементарном участке (Δl_i) берется произвольная точка N_i и вычисляется значение $f(N_i)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ функции $f(N)=f(x,y,z)$.

3. Составляются произведения $f(N_i)\cdot\Delta l_i$ $\quad(i=1, 2, \ldots, k)$, где Δl_i – длина дуги $(M_{i-1}M_i)$.

4. Данные произведения суммируются по всем значениям i: $\sum\limits_{i=1}^{k} f(N_i)\,\Delta l_i$.

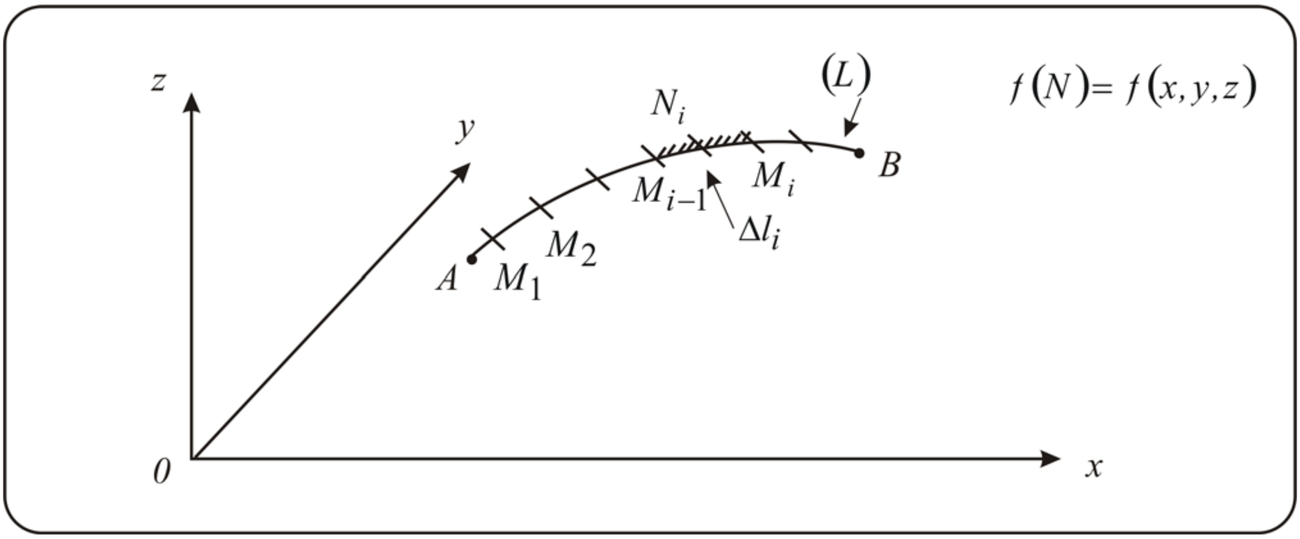


Рис. 4.6. Определение криволинейного интеграла первого рода

Физическое толкование криволинейного интеграла первого рода: криволинейный интеграл первого рода по дуге (L) пространственной кривой представляет собой массу этой дуги (L), если подынтегральная функция является линейной плотностью в точке.

4.4.2. Криволинейный интеграл второго рода

Криволинейным интегралом второго рода от функции трех переменных $f(M)=f(x,y,z)$ по координате x называется определенный интеграл, у которого предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\,\Delta x_i \tag{4.39}$$

вычисляется при условии, что наибольшая из длин $\max \Delta x$ проекций дуг $(N_{i-1}N_i)$ на ось Ox стремится к нулю (рис. 4.7):

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{(AB)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(N_i)\,\Delta x_i\,. \tag{4.40}$$

Интегральная сумма $\sum_{i=1}^{k} f(N_i)\Delta x_i$ составляется по следующим правилам [2]:

1. Дуга (AB) пространственной кривой разбивается на части точками $N_i\ (i = 0, 1, \ \dots\ , k)$, при этом для удобства положим, что $N_0 = A, N_n = B$.

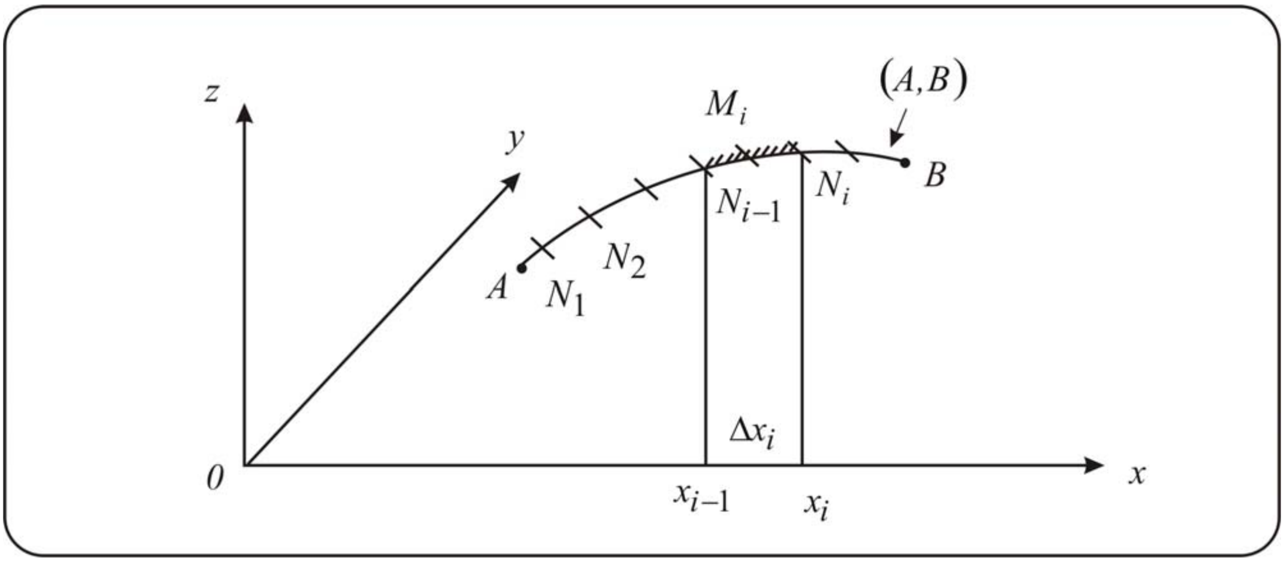


Рис. 4.7. Определение криволинейного интеграла второго рода

2. На каждой элементарной части $(N_{i-1}N_i)$ берется произвольная точка $M_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ и вычисляется значение $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ функции $f(N) = f(x, y, z)$.

3. Полученное значение функции умножим не на длину дуги $(N_{i-1}N_i)$, как это делали при составлении интегральной суммы для криволинейного интеграла первого рода, а на величину проекции этой дуги на ось Ox, то есть на величину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где x_i – абсцисса точки N_i, а x_{i-1} – абсцисса точки N_{i-1}: $f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \cdot \Delta x_i$.

4. Полученные произведения суммируются по всем элементарным дугам:

$$\sum_{i=1}^{k} f(M_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\,\Delta x_i \,.$$

4.4.3. Криволинейный интеграл второго рода общего вида

Криволинейным интегралом второго рода общего вида называется сумма

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{(AB)} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{(AB)} R(x,y,z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z\,. \qquad (4.41)$$

Механическое толкование криволинейного интеграла второго рода: криволинейный интеграл второго рода можно трактовать как работу переменной силы на криволинейном пути, если под функциями *P, Q, R* понимать проекции этой силы на координатные оси.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

5.1. Основные понятия теории векторных функций

Многие задачи, возникающие при изучении процессов преобразования электрической энергии, приводят к рассмотрению векторов как функций одного скалярного аргумента.

Вектор-функцией скалярного аргумента называется функция (рис. 5.1, *а*), для которой каждому допустимому значению скалярной величины t соответствует определенный вектор $\vec{a}$, то есть $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Если отнести вектор $\vec{a}$ к декартовой системе координат, то его проекции a_x, a_y, a_z на оси координат будут функциями от аргумента t. Разложение вектора $\vec{a}$ по координатным ортам декартовой системы координат при этом будет иметь вид

$$\vec{a}(t) = a_x(t) \cdot \vec{i} + a_y(t) \cdot \vec{j} + a_z(t) \cdot \vec{k}. \quad (5.1)$$

Годографом называется линия в пространстве, которую опишет конец вектора $\vec{a}$. Вектор, изменяющийся только по величине (длине), имеет своим годографом полупрямую (луч), выходящую из точки O (полюса) (рис. 5.1, *б*). Вектор, изменяющийся только по направлению, имеет своим годографом кривую, лежащую на сфере, с центром в полюсе и радиусом $R = |\vec{a}(t)|$ (рис. 5.1, *в*).

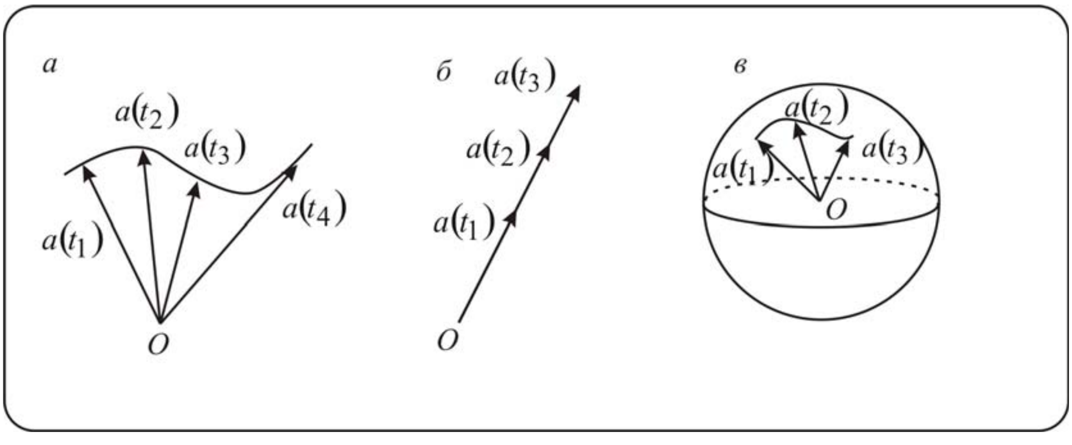


Рис. 5.1. Вектор-функция скалярного аргумента:
а – каждому допустимому значению соответствует определенный вектор;
б – вектор изменяется только по величине;
в – вектор изменяется только по направлению.

5.2. Скалярное поле

Если каждой точке M пространственной области (D) (которая может охватывать и все пространство) поставлено в соответствие определенное значение скалярной величины U, то говорят, что в области (D) задано *скалярное поле* этой величины. Задать скалярное поле – значит задать скалярную функцию точки:

$$U = \varphi\left(M\right). \tag{5.2}$$

Величина U, характеризующая скалярное поле, может зависеть также и от времени t.

Поверхностью уровня скалярного поля $U = \varphi\left(M\right)$ называется геометрическое место точек, в которых поле сохраняет постоянное значение. Уравнение поверхности уровня имеет вид [2]

$$\varphi\left(x, y, z\right) = C. \tag{5.3}$$

Придавая величине C различные значения $C_1, C_3, \ldots, C_n$, получим ряд поверхностей (рис. 5.2), которые в зависимости от физического смысла называются *изотермическими* (в поле температур), *изохорными* (в поле объема), *изобарическими* (в поле атмосферного давления), *эквипотенциальными* (в электрическом поле) и т. д.

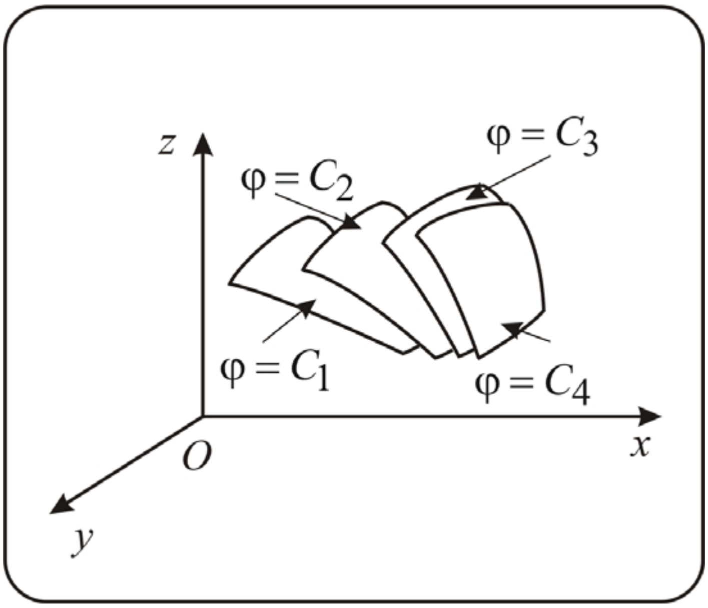


Рис. 5.2. Поверхности уровней скалярного поля

Семейство поверхностей уровня, построенное для отдельных значений C_i, дает наглядное представление о скалярном поле. Так, места сближения поверхностей уровня указывают на быстрое изменение поля в поперечном направлении.

Линией уровня скалярного поля $U = \varphi(M)$ называется геометрическое место точек, в которых плоское поле сохраняет постоянное значение. Уравнение поверхности уровня имеет вид

$$\varphi(x, y) = C. \tag{5.4}$$

5.3. Производная по направлению

При изучении скалярного поля $U = \varphi(M)$ важно знать скорость изменения поля при переходе от одной точки поля к другой.

Известно, что скорость изменения функции $\varphi(N) = \varphi(x, y, z)$ в направлении осей координат определяется с помощью ее частных производных $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Для того чтобы найти скорость изменения поля по заданному направлению, введем понятие производной поля по направлению.

Пусть в области (D), отнесенной к декартовой системе координат $Oxyz$, определено скалярное поле $U = \varphi(x, y, z)$ (рис. 5.3).

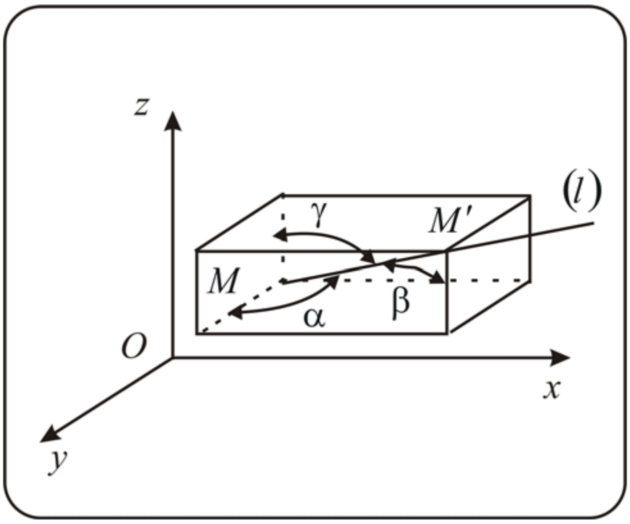


Рис. 5.3. Производная по направлению

Возьмем в этой области некоторую точку M, из которой можно выходить по всевозможным направлениям.

На данном рисунке показано одно из таких направлений (l), определенных ортом

$$1^\circ = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}\,. \tag{5.5}$$

Если будем перемещаться из точки M вдоль направления (l), то значение функции $U = \varphi(M)$ будет изменяться.

Средняя скорость изменения поля $U = \varphi(M)$ при перемещении из точки M в точку M' по направлению (l) будет характеризоваться отношением

$$\frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'}, \tag{5.6}$$

где MM' – величина перемещения по направлению (l).

Предел отношения (3.6), если он существует, когда точка M' стремится вдоль луча (l) к точке M, называется *производной от функции* $\varphi(M)$ *в точке М по направлению* (l) и обозначается символом $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{M'\to M} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'}. \tag{5.7}$$

Согласно известной теореме, приведенной в издании [2], производная от функции $\varphi(M)$ в точке M по направлению (l) составляет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma\,, \tag{5.8}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы направления (l) относительно соответствующих координатных осей.

5.4. Градиент скалярного поля

Градиент скалярного поля $\varphi(x, y, z)$ в его точке $M \quad (x, y, z)$ есть вектор, проекции которого на координатные оси равны частным производным (вычисленным в точке M) от функции φ по соответствующим аргументам:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \qquad (5.9)$$

Физический смысл градиента скалярного поля заключается в следующем. С введением градиента производную поля $\varphi(x, y, z)$ по направлению (l) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \operatorname{grad}\varphi \cdot 1^\circ = |\operatorname{grad}\varphi| \cdot |1^\circ| \cos\theta = |\operatorname{grad}\varphi| \cos\theta, \qquad (5.10)$$

где θ – угол между постоянным (для данной точки M) вектор-градиентом и некоторым направлением (l).

С изменением направления (l) $\cos\theta$ также будет изменяться, причем он принимает наибольшее значение тогда, когда направление (l) совпадает с направлением $\operatorname{grad}\varphi$, то есть угол $\theta = 0$ $(\cos\theta = 1)$.

Следовательно, скорость изменения поля $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ достигает наибольшего значения в направлении градиента и будет равна длине этого вектора:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad}\varphi|. \qquad (5.11)$$

Градиент скалярного поля φ в его точке M есть вектор, направленный из точки M в сторону наибольшего возрастания функции φ и по длине равный наибольшей скорости возрастания функции φ в этой точке.

5.5. Векторное поле

Если каждой точке M области (D) поставлен в соответствие определенный вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области (D) задано векторное поле $\vec{a}$ (или задана векторная функция точки этой области).

Задание векторной функции $\vec{a}(M)$ в области (D) равносильно заданию трех скалярных функций:

$$\vec{a}(M) = a_x(M)\cdot\vec{i} + a_y(M)\cdot\vec{j} + a_z(M)\cdot\vec{k} \qquad (5.12)$$

или

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\cdot\vec{i} + a_y(x,y,z)\cdot\vec{j} + a_z(x,y,z)\cdot\vec{k}. \qquad (5.13)$$

Функции a_x, a_y, a_z являются проекциями вектор-функции $\vec{a}$ на оси координат.

Наиболее часто встречающимися примерами в теории защиты информации векторных полей являются:

- поле скоростей стационарного потока жидкости;
- поле тяготения;
- электростатическое поле.

В *поле скоростей стационарного потока жидкости* в каждой точке (M) области (D) соответствует вектор $\vec{a}(M)$ – вектор скорости частицы жидкости, находящейся в точке M.

В *поле тяготения* в каждой точке (M) области (D) соответствует вектор $\vec{F}(M)$ – сила притяжения.

В *электростатическое поле* в каждой точке (M) области (D) соответствует вектор $\vec{E}(M)$ – напряженность электрического поля.

Векторной линией векторного поля $\vec{a}$ называется такая линия (в области D), которая в каждой своей точке касается соответствующего вектора поля (рис. 5.4).

В силовых полях векторную линию называют *силовой линией*, а в поле скоростей – траекторией движения.

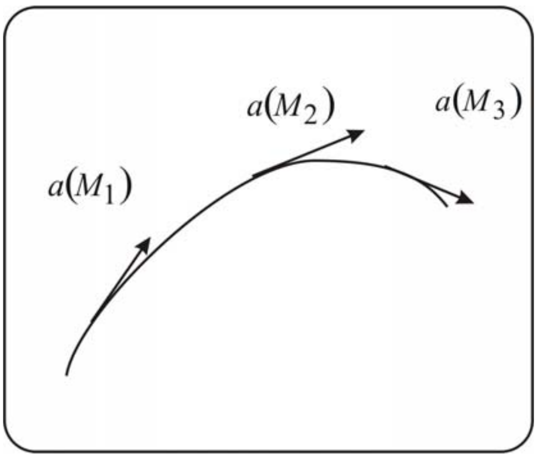


Рис. 5.4. Векторная линия

5.6. Поток векторного поля

5.6.1. Поток векторного поля через незамкнутую поверхность

Потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ *через незамкнутую поверхность* S (с выбранным направлением нормали n°) называется поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} f(N)\,\mathrm{d}S$ по поверхности S от нормальной составляющей a_n вектора $\vec{a}\,(M)$ (рис. 5.5):

$$P = \iint\limits_{(S)} a_n\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{(S)} \vec{a}\;n^\circ\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{(S)} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S}, \qquad (5.14)$$

где $\mathrm{d}\vec{S}$ – вектор, численно равный величине $\mathrm{d}S$, отложенный по нормали к поверхности S в рассматриваемой точке в направлении n°.

Нормалью называется перпендикуляр к касательной плоскости или к касательной в данной точке.

Определим *физический смысл потока несжимаемой жидкости в поле скоростей движущихся ее элементарных частиц.*

Для этого будем считать вектор $\vec{a}\,(M)$ вектором скорости движения элементарных частиц $\vec{v}\,(M)$ несжимаемой жидкости в точке M: $\vec{a}\,(M)=\vec{v}\,(M)$.

Так как скорость течения элементарных частиц несжимаемой жидкости $\vec{v}\,(M)$ меняется от точки к точке, разобьем заданную поверхность S на k элементарных частей: $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_k$. При этом будем считать каждую из этих поверхностей приблизительно плоской, а вектор $\vec{v}\,(M)$ для всех точек этой плоскости – приблизительно постоянным. Зафиксируем на поверхности точку M_i и соответствующий элемент поверхности ΔS_i. Определим в этой точке орт нормали $n^\circ(M_i)$ и вектор $\vec{v}\,(M_i)=\vec{a}\,(M_i)$.

Так как частица жидкости, которая в данный момент находилась в точке M_i элемента ΔS_i, перемещается за одну секунду в конец вектора $\vec{v}\,(M_i)$, то общее количество жидкости P_i, которое пройдет через элемент ΔS_i за одну секунду, будет приблизительно равно объему наклонного цилиндра ($P_i \approx V_i$).

Поскольку основание данного цилиндра равно ΔS_i, а ее высота – проекции вектора $\vec{v}(M_i)$ на нормаль $n^\circ(M_i)$ к поверхности в точке M_i, то объем цилиндра $V_i = v_n\,(M_i)\,\Delta S_i$.

С учетом сказанного, общее количество жидкости P, проходящее через поверхность S за одну секунду, приблизительно будет составлять $P \approx \sum_{i=1}^{k} V_k = \sum_{i=1}^{k} v_n\,(M_i)\,\Delta S_i$.

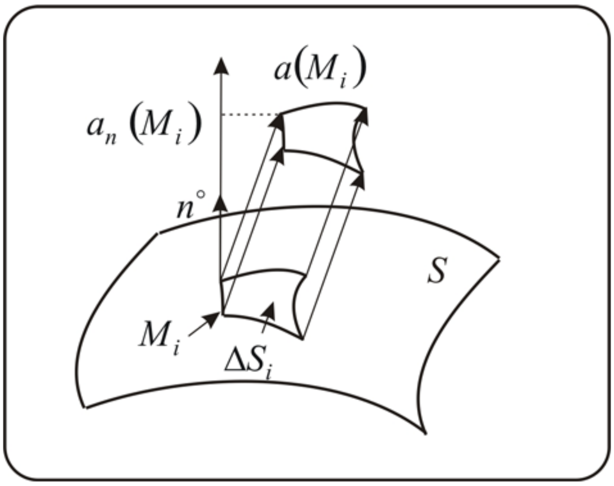


Рис. 5.5. Поток векторного поля через незамкнутую поверхность

Переходя к пределу, при условии, что наибольший из диаметров δ всех элементарных частей ΔS_i стремится к нулю, получим точное количество жидкости P, протекающее за одну секунду через поверхность S:

$$P = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{k} V_i = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{k} v_n\,(M_i)\,\Delta S_i = \iint_{(S)} v_n\,\mathrm{d}S = \iint_{(S)} a_n\,\mathrm{d}S\,.$$

Таким образом, физический смысл рассматриваемого потока заключается в следующем: поток поля скоростей элементарных частиц несжимаемой жидкости – это количество жидкости P, протекающее за 1 секунду через поверхность S.

Аналогично рассмотренному потоку определим *физический смысл потока силового поля через незамкнутую поверхность S*, который позволяет качественно объяснить появление силы $\vec{F}(M)$ в каждой точки поверхности S и силы F, действующей на эту поверхность.

Представим, что поток силового поля состоит из элементарных частиц, движущихся в точке M_i со скоростью $\vec{v}\ (M_i)$. При столкновении частицы потока с точкой M_i поверхности S проекция $v_n\ (M_i)$ вектора скорости $\vec{v}\ (M_i)$ на нормаль изменяет свой знак на противоположный, но остается постоянной в силу упругости элементарной частицы и точки поверхности (рис. 5.6).

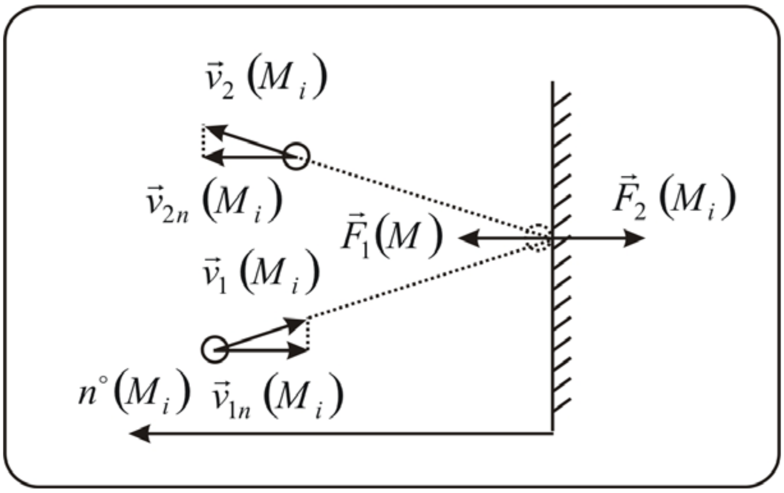


Рис. 5.6. Столкновение частицы потока силового поля с точкой незамкнутой поверхности

В результате столкновения элементарной частицы потока с точкой поверхности проекция ее импульса на нормаль изменится от величины $m\,v_1\ (M_i) = -m\,v_n(M_i)$ до величины $m\,v_2\ (M_i) = m\,v_n(M_i)$.

Изменение импульса частицы показывает, что на нее при столкновении действует сила $\vec{F}_1\ (M_i)$, направленная от точки поверхности противоположно нормали. Изменение импульса частицы потока равно импульсу силы:

$$F_1\ (M_i)\,\mathrm{d}t = m\,v_{2n} - m\,v_{1n} = m\,v_n + m\,v_n = 2m\,v_n. \qquad (5.15)$$

Во время отталкивания частица действует на точку M_i поверхности S с силой $\vec{F}_2\ (M_i)$, равной, по третьему закону Ньютона, силе $\vec{F}_1\ (M_i)$ по модулю и направленной противоположно, то есть по направлению нормали. Проводя интегрирование по поверхности S, как и ранее, находим количество частиц поля, которые действуют на эту поверхность в единицу времени. Изменение импульса всех этих частиц будет равно величине $2mv_n k$, где k – количество частиц потока силового поля, действующих на поверхность.

Таким образом, *физический смысл потока силового поля через незамкнутую поверхность* состоит в следующем: поток силового поля – это количество частиц массой m, действующих в единицу времени на поверхность с суммарной силой, составляющие которой направлены по нормали к каждой точке M поверхности S.

5.6.2. Поток векторного поля через замкнутую поверхность

Потоком векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (с выбранным направлением нормали $\vec{n}$) называется поверхностный интеграл по поверхности S от нормальной составляющей a_n этого поля (рис. 5.7):

$$P = \iint\limits_{(S)} \vec{a}\, n^\circ\, \mathrm{d}S = \iint\limits_{(S_1)} \vec{a}\, n^\circ\, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \vec{a}\, n^\circ\, \mathrm{d}S. \qquad (5.16)$$

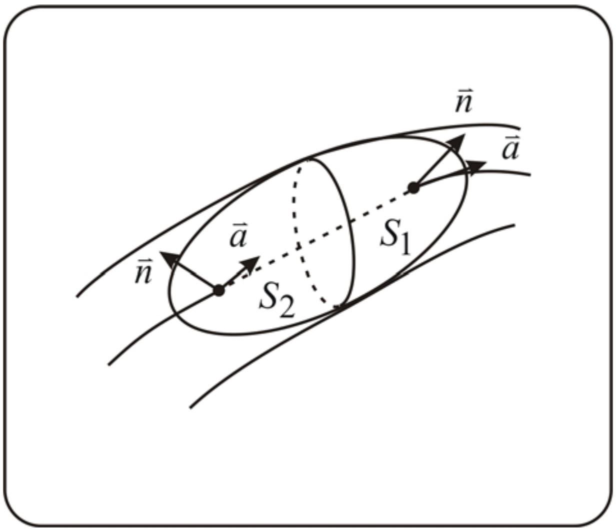


Рис. 5.7. Поток векторного поля через замкнутую поверхность

Если величина потока через замкнутую поверхность положительная $(P > 0)$, это свидетельствует о том, что внутри объема V существуют источники, питающие поток.

Если величина потока через замкнутую поверхность отрицательная $(P < 0)$, то это свидетельствует о том, что внутри объема V имеются стоки, поглощающие поток.

Если в объеме V нет ни источников, ни стоков или же они взаимно компенсируются, то количество жидкости, вытекающей и втекающей в объем, равны между собой ($P_1 = P_2$), и поток вектора через замкнутую поверхность S должен быть равным нулю.

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ в точке M называется конечный предел отношения потока векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (охватывающую точку M) к объему V, ограниченному этой поверхностью, при условии, что поверхность S неограниченно стягивается в точку M:

$$\operatorname{div} \vec{a}\left(M\right) = \lim_{(S)\to M} \frac{\iint\limits_{(S)} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S}}{V}. \tag{5.17}$$

Если $\operatorname{div}\vec{a}\left(M\right) > 0$, то в точке M имеется источник, если $\operatorname{div}\vec{a}\left(M\right) < 0$ – сток. Абсолютная величина $\left|\operatorname{div}\vec{a}\left(M\right)\right|$ характеризует *плотность потока* в данной точке.

5.7. Линейный интеграл вектор-функции вдоль дуги кривой

Линейным интегралом вектора $\vec{a}(N)$ вдоль дуги (AB) кривой L называют предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{k} \vec{a}\,(N_i)\, \Delta\vec{r}_i \tag{5.18}$$

при условии, что наибольший из диаметров δ всех элементарных частей дуги (AB) стремится к нулю ($\delta \to 0$):

$$\int\limits_{(AB)} \vec{a}\; d\vec{r} = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{k} \vec{a}\,(N_i)\Delta\vec{r}_i\,. \tag{5.19}$$

Интегральная сумма (5.18) для векторного поля, в котором взята кривая L, являющаяся годографом некоторой вектор-функции $\vec{a}(N)$, составляется по следующему правилу:

1. На кривой L выбираются две точки: A и B, которые определяют дугу (AB) (рис. 5.8).

2. Дуга AB (в направлении от A к B) разбивается на k произвольных элементарных частей (дуг) $(M_{i-1}M_i)$.

3. На каждой части выбирается по точке N_i, определяется значение вектора $\vec{a}$ в этой точке $\vec{a}(N_i)$ и составляется скалярное произведение

$$\vec{a}\,(N_i)\,\Delta\vec{r}_k\,.$$

4. Все эти произведения суммируются:

$$\sum_{i=1}^{k}\vec{a}\,(N_i)\,\Delta\vec{r}_i\,.$$

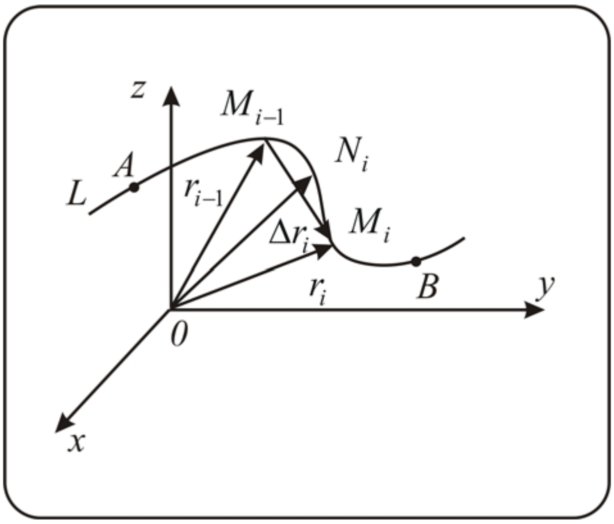


Рис. 5.8. Линейный интеграл от векторной функции

Формы записи линейного интеграла от векторной функции:

1. Так как

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,,$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\cdot\vec{i} + \Delta y\cdot\vec{j} + \Delta z\cdot\vec{k}\,,$$

то

$$\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} = a_x\cdot\Delta x + a_y\cdot\Delta y + a_z\cdot\Delta z\,,$$

а

$$\sum \vec{a}\,\Delta\vec{r} \quad = \quad \sum\, a_x\,\Delta x + a_y\,\Delta y\, a + a_z\,\Delta z$$

(для сокращенной записи индексы опущены).

Следовательно, линейный интеграл сводится к криволинейному интегралу второго рода:

$$\int\limits_{(AB)} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} \quad = \quad \int\limits_{(AB)} a_x\,\mathrm{d}x + a_y\,\mathrm{d}y + a_z\,\mathrm{d}z\,. \qquad (5.20)$$

2. Так как вектор $\mathrm{d}\vec{r}$ и единичный вектор s° касательной к кривой коллинеарны и $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$, то $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}s \cdot s^{\circ}$.

Тогда

$$\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{a}\; s^{\circ}\,\mathrm{d}s = a_s \cdot \mathrm{d}s\,.$$

Линейный интеграл вектора может быть записан следующим образом:

$$\int\limits_{(AB)} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} \quad = \quad \int\limits_{(AB)} a_s\,\mathrm{d}s\,, \qquad (5.21)$$

(здесь a_s – проекция вектора $\vec{a}$ на направление s°).

Физический смысл линейного интеграла от векторной функции. Если поле вектора $\vec{a}(N)$ – силовое, то линейный интеграл равен работе, совершенной полем при перемещении материальной частицы по дуге *AB* линии *L*.

5.8. Циркуляция вектора вдоль кривой

Циркуляцией вектора $\vec{a}$ вдоль кривой называется линейный интеграл вектора $\vec{a}$, взятый вдоль замкнутой кривой *L*:

$$C \quad = \quad \oint\limits_{L} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}\,. \qquad (5.22)$$

Положительное направление обхода контура принято определять по правилу буравчика, предварительно задав направление нормали (рис. 5.9).

Если вектор $\vec{a}$ представляет силу, то циркуляция этого вектора по любому замкнутому пути дает работу силы при перемещении материальной частицы по замкнутому пути. Для векторных полей иной природы циркуляция имеет другой физический смысл.

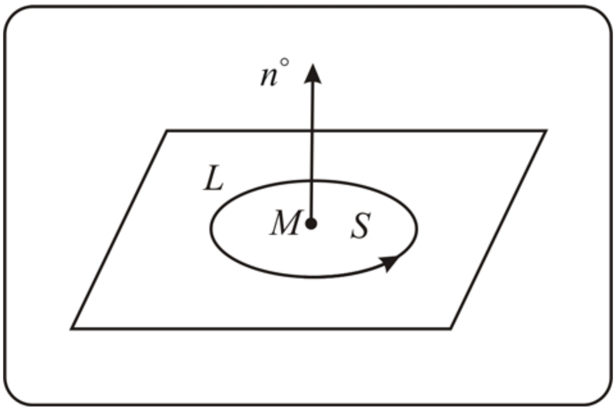


Рис. 5.9. Положительное направление обхода контура

Следует заметить, что равенство нулю циркуляции вектора по любому замкнутому контуру в векторном поле $\vec{a}$ является достаточным условием отсутствия в этом поле замкнутых векторных линий.

Средней плотностью циркуляции по плоскому контуру называется отношение площади плоской фигуры S, ограниченной контуром L:

$$\mu_{\text{ср}} = \frac{\oint\limits_L \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}}{S}. \tag{5.23}$$

Плоскостной плотностью циркуляции в точке M называется конечный предел

$$\mu(M, n^\circ) = \lim_{(S)\to M} \frac{\oint\limits_L \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}}{S} \tag{5.24}$$

при стягивании области (S) к точке M (см. рис. 5.9).

5.9. Ротор векторного поля

Ротором, *или вихрем векторного поля* $\vec{a}$, называется вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$, проекции которого на координатные оси определяются как

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{k} \tag{5.25}$$

или в символической форме –

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{5.26}$$

Особенно простой вид имеет вихрь плоского поля:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{5.27}$$

Вихрем (*ротором*) векторного поля $\vec{a}$ в точке *M* называется вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$, направленный так, что для перпендикулярной к нему плоскости плотность циркуляции в точке *M* будет наибольшей, а по длине он будет равен этой наибольшей плотности циркуляции.

Для выявления физического смысла ротора рассмотрим частные примеры.

1. Пусть задано плоское поле скоростей текущей жидкости (рис. 5.10). Как видно из рисунка, проекции вектора $\vec{a}$ на оси a_x, a_y постоянны, поэтому $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

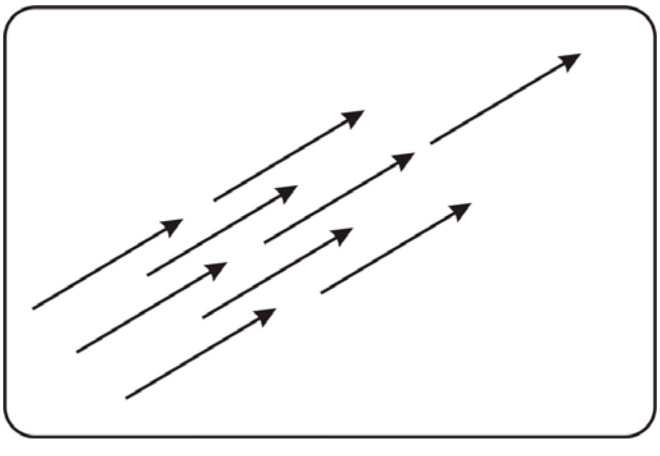


Рис. 5.10. Плоское поле скоростей текущей жидкости:
$a_x = \text{const}$, $a_y = \text{const}$; $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$

Равенство нулю ротора указывает на отсутствие завихренности поля.

2. Пусть плоское векторное поле $\vec{a}$ имеет проекции $a_x = 0, a_y = \lambda y$; тогда $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

На рисунке 5.11 видно, что и у этого поля нет завихренности.

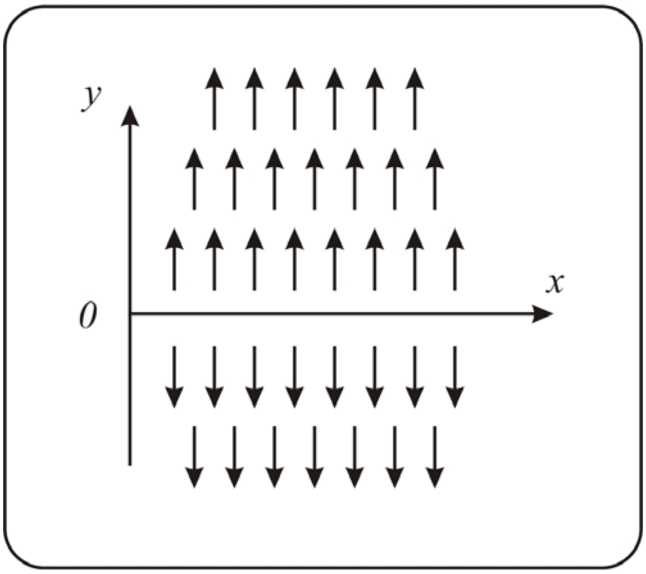


Рис. 5.11. Плоское поле скоростей текущей жидкости:
$a_x = 0, a_y = \lambda y$; $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$

3. Рассмотрим плоское поле скоростей текущей жидкости с проекциями $a_x = y\omega, a_y = x\omega$, то есть поле вектора $\vec{a} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}$.

Так как вектор $\vec{a} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}$, то $\operatorname{rot}\vec{a} = 2\omega\vec{k}$ (рис. 5.12).

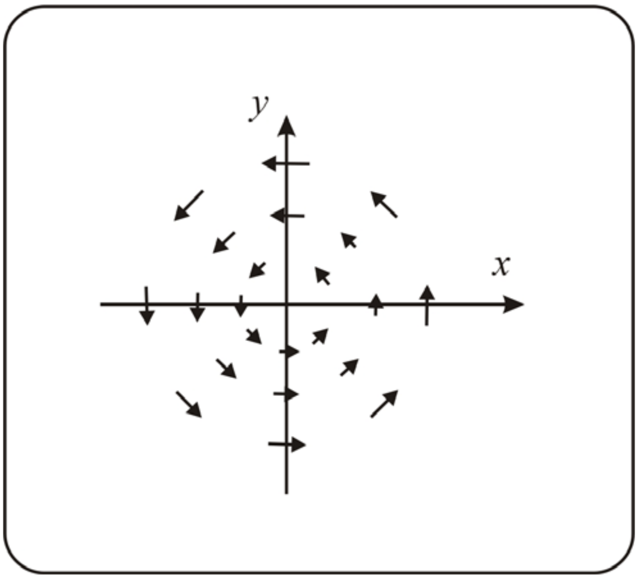


Рис. 5.12. Плоское поле скоростей текущей жидкости:
$a_x = y\omega, a_y = x\omega$; $\operatorname{rot}\vec{a} = 2\omega\vec{k}$

5.10. Оператор Гамильтона

Если область (D), в которой определено поле, отнесена к прямоугольным координатам, то основные дифференциальные операции векторного анализа – градиент скалярного поля, дивергенция, вихрь (ротор) векторного поля – выражаются формулами:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\vec{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\vec{k}; \tag{5.28}$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \tag{5.29}$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{5.30}$$

Данные три основные операции могут быть очень просто выражены с помощью символического вектора

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}. \tag{5.31}$$

Вектор-оператор $\vec{\nabla}$ называется оператором Гамильтона (оператором набла) и приобретает определенный смысл лишь в комбинации со скалярными или векторными величинами. При этом оператор $\vec{\nabla}$ сохраняет как черты вектора, так и черты операции дифференцирования.

В соответствии с этим *градиент скалярной функции* формально можно рассматривать как умножение вектора $\vec{\nabla}$ на скаляр φ:

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\cdot\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)\cdot\varphi =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\vec{k}. \tag{5.32}$$

Дивергенцию векторного поля $\vec{a}$ можно рассматривать (формально) как скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{a}$:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(a_x\,\vec{i} + a_y\;\vec{j} + a_z\,\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{5.33}$$

Вихрь можно рассматривать (формально) как векторное произведение символического вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)\times\left(a_x\,\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{5.34}$$

Итак, три операции $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\vec{a}$ могут быть выражены через основные операции векторной алгебры:

- $\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\cdot\varphi$ (произведение вектора на скаляр);
- $\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ (скалярное произведение векторов);
- $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a}$ (векторное произведение векторов).

Рассмотренные операции $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\vec{a}$ преобразовывают:

- скалярное поле φ – в векторное $\vec{G} = \operatorname{grad}\varphi$ $(\varphi \to \operatorname{grad}\varphi)$;
- векторное поле $\vec{a}$ – в скалярное $U = \operatorname{div}\vec{a}$ $(\vec{a} \to \operatorname{div}\vec{a})$;
- векторное поле $\vec{a}$ – в векторное $\vec{W} = \operatorname{rot}\vec{a}$ $(\vec{a} \to \operatorname{rot}\vec{a})$.

Все векторные поля делятся:

- на потенциальное $(\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0)$;

- соленоидальное $(\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0)$;
- лапласово $(\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0; \quad \operatorname{div}\vec{a} \equiv 0)$;
- поле общего вида $(\operatorname{rot}\vec{a} \neq 0; \quad \operatorname{div}\vec{a} \neq 0)$.

Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным, или *безвихревым,* в области (D), если в каждой точке этой области $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Векторное поле $\vec{a}$ называется *соленоидальным*, или трубчатым, в области (D), если в каждой точке этой области $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

Векторное поле $\vec{a}$ называется *лапласовым* (гармоническим) в области (D), если в каждой точке этой области $\operatorname{rot}\vec{a} = 0; \quad \operatorname{div}\vec{a} = 0$.

Векторное поле $\vec{a}$ называется *полем общего вида* в области (D), если $\operatorname{rot}\vec{a} \neq 0; \quad \operatorname{div}\vec{a} \neq 0$.

Относительно таких полей доказывают, что любое векторное поле $\vec{a}$ можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей: $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{b}$.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ К ТЕОРЕТИЧЕСКИМ АСПЕКТАМ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

6.1. Приложения функции к анализу колебаний физической величины

Электромагнитное состояние устройств хранения, обработки и передачи информации характеризуется определенными физическими величинами, например, напряжением, магнитным потоком, силой тока и т. д. Отвлекаясь от физического смысла конкретной физической величины, будем рассматривать ее как математическую величину s, числовые значения которой являются значениями физической величины, определенными или измеренными в момент времени t согласно выражению (2.1).

6.1.1. Общее понятие о колебании физической величины

Значение физической величины в данный момент времени называют ее *мгновенным значением*. В научно-технической литературе часто значения физической величины называют также физической величиной и обозначают одним символом – s. Название одним и тем же термином физической величины и ее значения не вызывает недоразумений, поскольку в каждом конкретном случае ясно, что имеется в виду, а предложения при этом становятся более компактными.

Если в рассматриваемых условиях значения физической величины не изменяются, то такую физическую величину называют *постоянной* (например, постоянное напряжение, постоянный магнитный поток) и обозначают прописной буквой S. Физическую величину, значения которой в рассматриваемых условиях изменяются во времени, будем называть *переменной* (например, переменная электродвижущая сила, переменный ток) и обозначать символом $s(t)$.

Поскольку переменная физическая величина $s(t)$ зависит от времени t, ее можно рассматривать как функцию от времени (*временную функцию*): $s(t) = f(t)$.

График зависимости переменной физической величины (в смысле ее значений) от времени $s(t) = f(t)$ называется *развернутой диаграм-*

мой этой величины, которая наглядно иллюстрирует представление о том, как количественно изменяется эта величина. Кроме того, она дает возможность определить ее значение для любого заданного момента времени, не прибегая к математическим вычислениям (рис. 6.1).

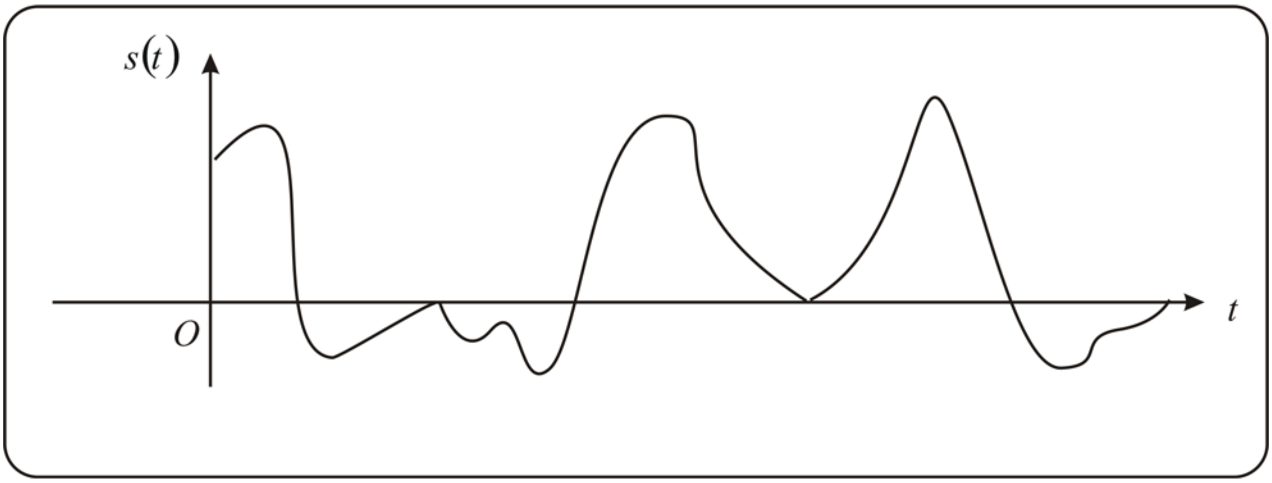


Рис. 6.1. Развернутая диаграмма физической величины

В электроэнергетике (как и в других областях промышленности) изменение во времени физических величин (то есть увеличение и уменьшение их значений) называют *колебаниями* соответствующих величин. При этом колебания могут происходить как с изменением, так и без изменения знака колеблющейся величины (колебания в широком смысле).

Колебания в электроэнергетических устройствах могут быть описаны как непериодическими $s(t) \neq s(t+T)$, так и периодическими $s(t) = s(t+T)$ функциями времени.

При периодических колебаниях физическая величина повторяет полный цикл своих изменений через равные промежутки времени. На рисунке 6.2 приведена развернутая диаграмма периодического колебания физической величины, из которой видно, что через равные промежутки времени T график изменения физической величины воспроизводится полностью.

Интервал времени T, в течение которого значения физической величины совершают полный цикл своих изменений, возвращаясь к своему исходному значению, называется *периодом переменной физической величины* (*колебаниями*).

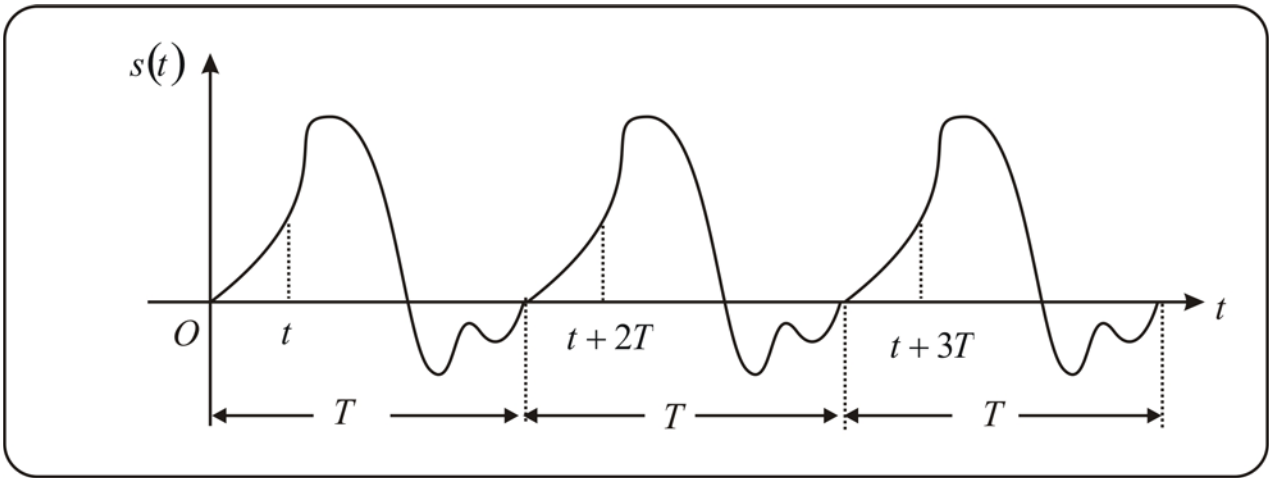


Рис. 6.2. Развернутая диаграмма периодического колебания

Число колебаний в одну секунду называется *циклической частотой физической величины* (*колебания*) и обозначается буквой f.

Определим связь циклической частоты колебания с его периодом. Если за время t совершено n циклов колебания, а период колебания равен T, то

$$f = \frac{n}{t} = \frac{n}{Tn} = \frac{1}{T}, \tag{6.1}$$

то есть циклическая частота физической величины является величиной, обратной периоду. За единицу измерения частоты переменной физической величины принята частота такого периодического колебания, период которого равен одной секунде. Эта единица частоты называется герцем (Гц).

6.1.2. Гармонические колебания

Для многочисленных приложений к исследованию физических величин, применяемых в электроэнергетических дисциплинах, важнейшей периодической функцией является *синусоидальная функция* вида

$$y = a\sin(kx + b), \tag{6.2}$$

которую принято называть *гармоникой* (*гармоническим колебанием*) и обозначать выражением

$$s(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi) = S_m \sin\Phi(t), \tag{6.3}$$

где S_m – амплитуда колебания (наибольшее по абсолютному значению отклонение колеблющейся величины);

$\Phi(t) = \omega t + \varphi$ – фаза гармоники (переменная величина, пропорциональная времени t и обозначающая угол, измеренный в радианах);

φ – начальная фаза колебания (угол, измеренный в радианах в момент времени $t = 0$);

$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$ – угловая частота колебания (параметр, определяющий скорость изменения фазы $\Phi(t)$ во времени).

Поскольку за один период T фаза $\Phi(t)$ колебания изменяется на угол, равный 2π радиан, то угловая частота ω связана с периодом выражением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{6.4}$$

и измеряется в радианах в секунду (рад/с). Угловой частоте можно дать и другое физическое толкование. Действительно, учитывая соотношения (6.4) и (6.1), получаем выражение

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\,, \tag{6.5}$$

из которого следует, что угловая частота ω характеризует число циклов колебания в интервале, равном 2π единицам времени.

Используя основные свойства деформации графиков функций, описанные в подп 1.6.4, нетрудно заметить, что график гармоники $s(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(kx + b)$ получается из графика синусоиды $y = \sin x$ равномерным сжатием или растяжением в направлении осей координат и сдвигом вдоль оси абсцисс и при начальной фазе $\varphi = 0$ имеет вид, показанный на рис. 6.3.

Сравнивая выражения 6.2 и 6.3 и учитывая формулу 6.5, определим физической смысл коэффициента пропорциональности k в соотношении 6.2. Поскольку период функции $y = \sin x$ составляет 2π, то период функции $y = \sin kx$ будет составлять $T = \dfrac{2\pi}{k}$. Отсюда имеем $k = \dfrac{2\pi}{T} = \omega$, то есть коэффициент пропорциональности синусоидальной функции есть угловая частота гармонического колебания.

Заметим, что всякую гармонику $s(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi)$ можно представить в виде

$$s(t) = S'_m \cos \omega t + S''_m \sin \omega t. \qquad (6.6)$$

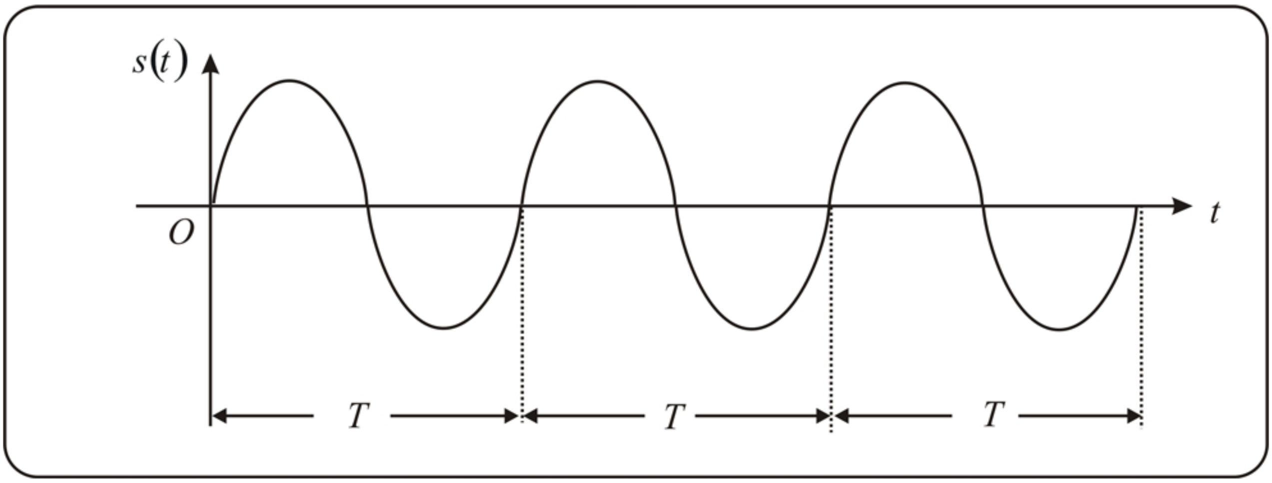


Рис. 6.3. Развернутая диаграмма гармонического колебания

Действительно, так как

$$S_m \sin(\omega t + \varphi) = S_m \sin\varphi \cdot \cos\omega t + S_m \cos\varphi \cdot \sin\omega t, \qquad (6.7)$$

то, обозначая $S_m \sin\varphi = S'_m, \quad S_m \cos\varphi = S''_m$, получим

$$s(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi) = S'_m \cos\omega t + S''_m \sin\omega t. \qquad (6.8)$$

Можно высказать и обратное положение: любая функция вида (6.6) представляет собой гармонику с амплитудой

$$S_m = \sqrt{S'^2_m + S''^2_m} \qquad (6.9)$$

и начальной фазой

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{S'_m}{S''_m}. \qquad (6.10)$$

Формулы (6.9) и (6.10) получаются из равенства $S_m \sin\varphi = S'_m, \quad S_m \cos\varphi = S''_m$.

Каждое из выражений:

$$s_1(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{6.11}$$

и

$$s_2(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \tag{6.12}$$

определяет гармоническое колебание с амплитудой S_m, частотой ω (или периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$) и начальной фазой φ.

Эти колебания сдвинуты во времени одно по отношению к другому на величину, равную четверти периода $\frac{T}{4}$, или $\frac{\pi}{2}$. В этом случае говорят, что колебания (6.11) и (6.12) находятся в квадратуре.

Если сдвиг фазы $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ между двумя колебаниями $s_1(t)$ и $s_2(t)$ равен 0 или π, то считается, что такие колебания происходят соответственно в *фазе* или в *противофазе*.

Наряду с такими параметрами, как амплитуда, фаза, частота, важными параметрами гармонического колебания являются его среднее и действующее значения.

Под *средним значением синусоидально изменяющейся величины* понимают ее среднее значение за полпериода:

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{T/2} \int\limits_0^{T/2} S_m \sin \omega t \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} S_m \approx 0{,}638 \; S_m . \tag{6.13}$$

Действующим (*эффективным*, *среднеквадратическим*) значением синусоидально изменяющейся величины называется величина, определяемая по выражению

$$S = \sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_0^T s^2 \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_0^T S_m^2 \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}t} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \, S_m . \tag{6.14}$$

Физический смысл действующего значения гармонического колебания поясним на примере действующего значения синусоидального тока.

Действующее значение I синусоидального тока $i(t)$ численно равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет такое же количество теплоты (тепловой энергии), что и синусоидальный ток.

Действительно, количество теплоты, выделяемое за один период синусоидальным током, составляет

$$Q = \int_0^T Ri^2 \, \mathrm{d}t = RI_m^2 \frac{T}{2}. \tag{6.15}$$

Количество теплоты, выделяемое за это же время постоянным током,

$$Q = RI_{\text{пост}}^2 T. \tag{6.16}$$

Приравнивая выражения (6.15) и (6.16), получим

$$RI_m^2 \frac{T}{2} = RI_{\text{пост}}^2, \tag{6.17}$$

или

$$I_{\text{пост}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I. \tag{6.18}$$

6.1.3. Векторная диаграмма гармонического колебания

Для наглядного суждения о соотношениях между амплитудами и начальными фазами гармонических колебаний равных частот в одном и том же электромагнитном устройстве используется векторная диаграмма. На ней в полярной системе координат каждому изображаемому гармоническому колебанию соответствует радиус-вектор, длина ρ которого в выбранном масштабе пропорциональна амплитуде S_m колебания, а полярный угол равен начальной фазе.

Поскольку, зная амплитуду и начальную фазу колебания, можно для любого момента времени при заданной частоте определить его мгновенное значение, то эти два параметра полностью характеризуют не только переменную физическую величину, но и положение вращающегося радиуса-вектора в полярной системе координат.

Графическое изображение синусоидальной физической величины с помощью вращающегося радиуса-вектора называется *векторной диаграммой* этой величины.

Пользуясь векторной диаграммой гармонического колебания, с помощью формул 1.19 легко построить его развернутую диаграмму, а также произвести сложение и вычитание синусоидальных величин, имеющих одинаковую угловую частоту, но в общем случае различные амплитуды и начальные фазы.

Возможность замены суммирования тригонометрических функций суммированием векторов, изображающих эти функции, существенно упрощает решение многих задач анализа гармонических колебаний в электромагнитных цепях.

Действительно, так как гармоническим колебаниям $s_1(t) = S_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $s_2(t) = S_{m2}\cos(\omega t + \varphi_2)$ соответствуют вращающиеся радиусы-векторы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, то вращающемуся радиусу-вектору $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ будет соответствовать гармоническое колебание $s(t) = S_m\cos(\omega t + \varphi)$. Амплитуда и начальная фаза результирующего колебания определяются по правилам сложения векторов.

Амплитуду и начальную фазу результирующего колебания также можно определить, используя тригонометрические выражения, для чего сначала убедимся в том, что в результате наложения (суммирования) двух гармонических колебаний равных частот результирующее колебание будет гармоническим той же частоты.

С этой целью запишем гармонические колебания

$$s_1(t) = S_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и } s_2(t) = S_{m2}\cos(\omega t + \varphi_2) \qquad (6.19)$$

в виде

$$s_1(t) = S_{m1}\cos\varphi_1\cos\omega t - S_{m1}\sin\varphi_1\sin\omega t \qquad (6.20)$$

и

$$s_2(t) = S_{m2}\cos\varphi_2\cos\omega t - S_{m2}\sin\varphi_2\sin\omega t. \qquad (6.21)$$

Тогда, после группирования слагаемых, имеем

$$\begin{aligned} s_1(t) + s_2(t) = {} & (S_{m1}\cos\varphi_1 + S_{m2}\cos\varphi_2)\cos\omega t - \\ & - (S_{m1}\sin\varphi_1 + S_{m2}\sin\varphi_2)\sin\omega t. \end{aligned} \qquad (6.22)$$

Для коэффициентов при функциях $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ всегда можно подобрать такие обозначения, при которых правая часть равенства (6.22) будет представлять собой косинус суммы двух углов: ωt и φ. Для этого необходимо, чтобы

$$S_{m1}\cos\varphi_1 + S_{m2}\cos\varphi_2 = S_m\cos\varphi \tag{6.23}$$

и

$$S_{m1}\sin\varphi_1 + S_{m2}\sin\varphi_2 = S_m\sin\varphi. \tag{6.24}$$

Тогда

$$s_1(t) + s_2(t) = S_m\cos\varphi\cos\omega t - S_m\sin\varphi\sin\omega t \tag{6.25}$$

и, следовательно,

$$s_1(t) + s_2(t) = S_m\cos(\omega t + \varphi), \tag{6.26}$$

то есть наложение двух гармонических колебаний равных частот действительно образует гармоническое колебание той же частоты.

Амплитуда S_m результирующего колебания находится из уравнений (6.23) и (6.24) после возведения каждого из них в квадрат и последующего суммирования:

$$S_m = \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2 + 2S_{m1}^2 S_{m2}^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{6.27}$$

По частному из тех же уравнений

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{S_{m1}\sin\varphi_1 + S_{m2}\sin\varphi_2}{S_{m1}\cos\varphi_1 + S_{m2}\cos\varphi_2} \tag{6.28}$$

находится начальная фаза φ результирующего колебания с учетом знаков $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Заметим, что если колебания находятся в квадратуре, ($\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}$, $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$), то амплитуда результирующего колебания оказывается равной корню квадратному из суммы квадратов амплитуд составляющих колебаний: $S_m = \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2}$.

6.1.4. Изображение гармонического колебания комплексным числом

Для решения задач анализа гармонических колебаний в линейных электромагнитных цепях преимущественно используется метод, основанный на замене операций над косинусоидальными функциями, описывающими колебания, операциями над комплексными числами, содержащими полную информацию о параметрах колебания.

Возможность подобной замены обусловлена тем, что в режиме гармонических колебаний все колебания имеют одну и ту же заранее известную частоту. Однако тогда функция $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, описывающая заданное гармоническое колебание известной частоты, характеризуется лишь двумя вещественными числами: S_m и φ. Эти два числа можно объединить в одно комплексное число. Другими словами, между гармоническим колебанием $s(t)$ и комплексным числом $\dot{S}_m$ можно установить взаимно однозначное соответствие: $\mathit{Г} : s(t) \to \dot{S}_m$ и $\mathit{Г}^{-1} : \dot{S}_m \to s(t)$.

Прямое преобразование $\mathit{Г} : s(t) \to \dot{S}_m$ позволяет любому гармоническому колебанию $s(t)$ поставить в соответствие комплексное число (*символическое изображение гармонического колебания*) $\dot{S}_m$. Формально комплексное число $\dot{S}_m = S_m e^{j\varphi}$ является результатом выполнения над функцией $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ математической операции

$$\dot{S}_m = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\, e^{-j\omega t} \mathrm{d}t, \qquad (6.29)$$

где $T = 2\pi/\omega$.

Действительно,

$$\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\, e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T S_m \cos(\omega t + \varphi)\, e^{-j\omega t} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2S_m}{T}\int_0^T \frac{e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)+}}{2}\, e^{-j\omega t} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{S_m}{T} e^{-j\varphi}\int_0^T \mathrm{d}t + \frac{S_m}{T}\int_0^T e^{-j(2\omega t+\varphi)} \mathrm{d}t = S_m e^{j\varphi} = \dot{S}_m. \qquad (6.30)$$

Следовательно, символическое изображение косинусоидальной функции может быть найдено, если последнюю умножить на величину $\frac{2}{T}e^{-j\omega t}$ и затем проинтегрировать произведение в пределах одного периода.

Обратное преобразование $\Gamma^{-1}: \dot{S}_m \to s(t)$ комплексного числа $\dot{S}_m$ в функцию $s(t)$ в математической записи выглядит как

$$s(t) = \mathrm{Re}\left(\dot{S}_m e^{j\omega t}\right). \qquad (6.31)$$

В самом деле, используя формулу Эйлера, имеем

$$\dot{S}_m e^{j\omega t} = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = S_m \cos(\omega t + \varphi) + jS_m \sin(\omega t + \varphi). \qquad (6.32)$$

Вещественная часть этой комплексной величины и есть искомая функция $s(t)$.

6.2. Приложения комплексного числа к анализу магнитных полей, создаваемых переменным током

6.2.1. Магнитное поле катушки с синусоидальным током

Магнитное поле катушки с синусоидальным током представляет собой *пульсирующее магнитное поле*, под которым понимают поле, вектор магнитной индукции которого изменяется (пульсирует) вдоль оси, создающей его катушки с током.

На рисунке 6.4 изображена катушка, по которой проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin \omega t$.

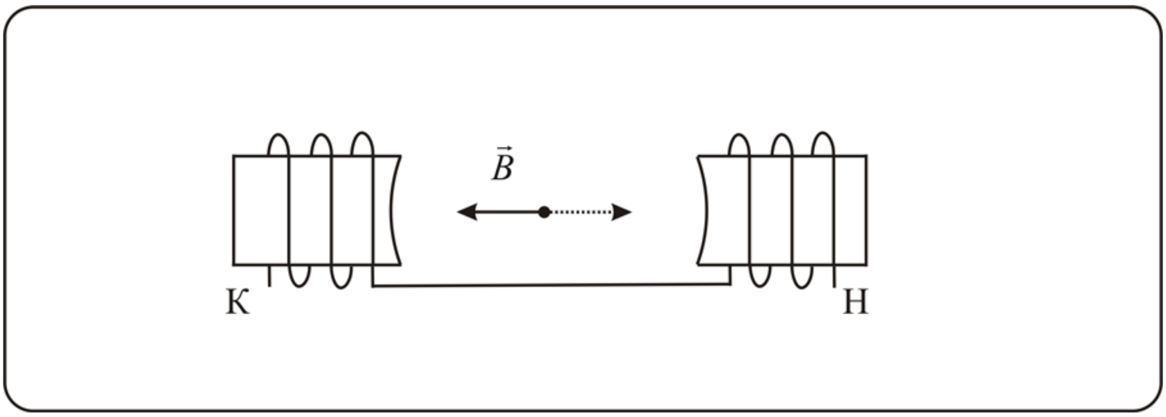


Рис. 6.4. Магнитное поле катушки с синусоидальным током

Магнитное поле характеризуется магнитной индукцией $\vec{B}$, направление которой определяется направлением намотки катушки и направлением тока в ней в данный момент времени.

Пусть буква Н означает начало, а К – конец катушки. Если ток входит в зажим Н и выходит из зажима К (это направление тока будем считать положительным, ему соответствует интервал времени от 0 до π), то вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен справа налево по осевой линии катушки. В следующий полупериод, когда ток отрицателен, вектор $\vec{B}$ направлен слева направо (см. пунктир на рис. 6.4). Таким образом, геометрическим местом концов вектора $\vec{B}$ является ось катушки.

6.2.2. Вращающееся магнитное поле двухфазного тока

Вращающееся магнитное поле двухфазного тока представляет собой магнитное поле, создаваемое двухфазным током, вектор результирующей магнитной индукции которого имеет постоянное значение и вращается с постоянной угловой скоростью. Вращающееся магнитное поле двухфазного тока применяется в некоторых измерительных приборах переменного тока.

Двухфазным током называется совокупность двух однофазных токов, сдвинутых по фазе относительно друг друга на угол $\frac{\pi}{2}$:

$$i_1 = I_m \sin \omega t,$$
$$i_2 = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (6.33)$$

Принцип получения такого вращающегося магнитного поля поясняется на рис. 6.5. Предположим, что две одинаковые катушки расположены в пространстве так, что их оси взаимно перпендикулярны. Если такая система катушек питается двухфазным током, то в ней создаются пульсирующие магнитные поля с индукциями в точке пересечения катушек:

$$B_1 = B_m \sin \omega t,$$
$$B_2 = B_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = B_m \cos \omega t. \qquad (6.34)$$

Данные магнитные поля пространственно расположены относительно друг друга под углом 90°. Поэтому комплекс результирующей магнитной индукции будет равен следующей величине:

$$\dot{B} = \dot{B}_1 + \dot{B}_2 = jB_1 + j\vec{a}B_2 = j\left(B_1 + \vec{a}B_2\right) =$$

$$= j\left(B_m \sin\omega t + \vec{a}B_m \cos\omega t\right) = jB_m\left(\sin\omega t - j\cos\omega t\right) =$$

$$= -jB_m\left(-\sin\omega t + j\cos\omega t\right) = -B_m\left(-\cos\omega t - j\sin\omega t\right) =$$

$$= B_m\left[\cos(\omega t) + j\sin(-\omega t)\right] = jB_m e^{-j\omega t}, \qquad (6.35)$$

то есть результирующий вектор магнитной индукции двух катушек, питающихся двухфазным током, вращается по часовой стрелке с угловой частотой ω, а его модуль не зависит от времени и численно равен максимальной магнитной индукции катушки.

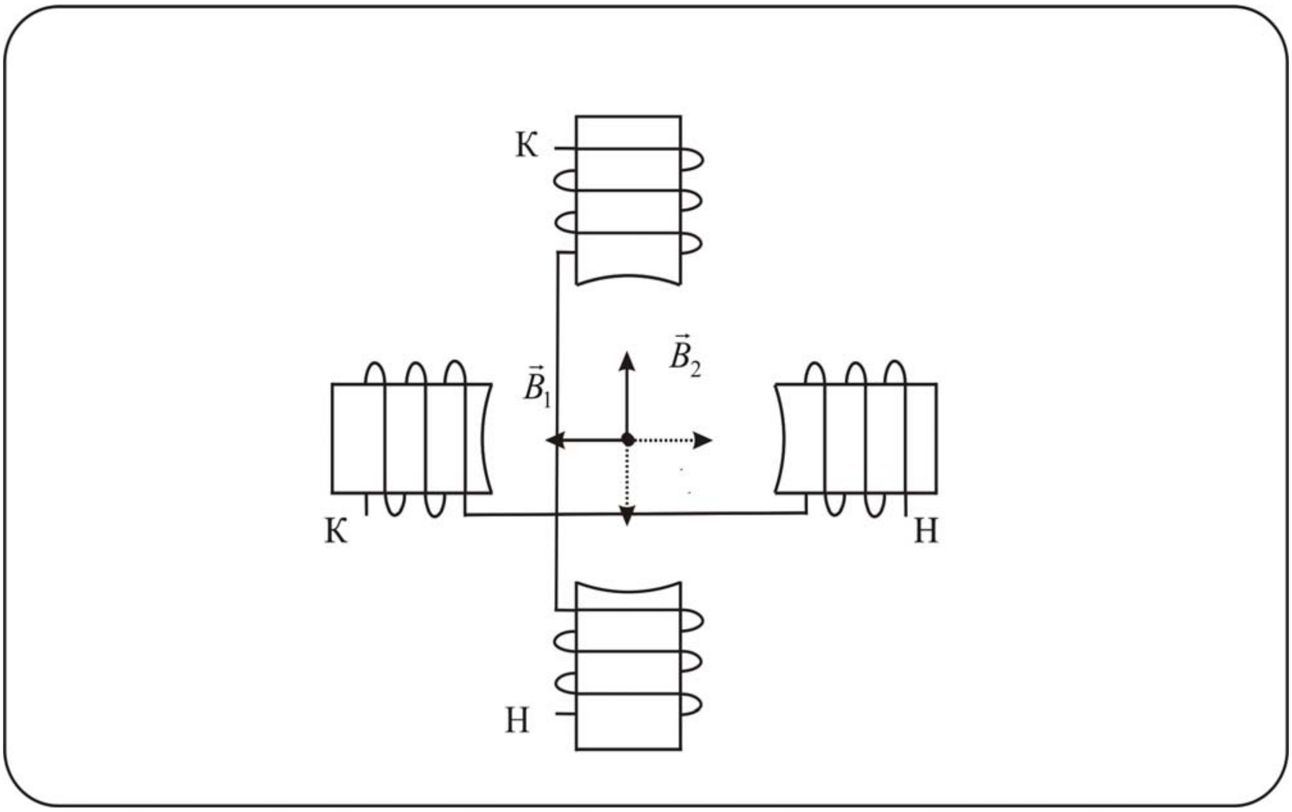


Рис. 6.5. Вращающееся магнитное поле двухфазного тока

6.2.3. Вращающееся магнитное поле трехфазного тока

Вращающееся магнитное поле трехфазного тока представляет собой магнитное поле, создаваемое трехфазным током, вектор результирующей магнитной индукции которого имеет постоянное значение и вращается с постоянной угловой скоростью (рис. 6.6).

Принцип получения вращающегося магнитного поля состоит в следующем. Допустим, что три одинаковые катушки, обозначенные соответственно буквами A, B, C, расположены в пространстве так, что их оси составляют углы, равные $\frac{2}{3}\pi$ (рис. 6.6, *а*). Катушки неподвижно закреплены и находятся под напряжением симметричной трехфазной сети, так что токи в них равны:

$$i_A = I_m \sin \omega t,$$

$$i_B = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right);$$

$$i_C = I_m \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right). \qquad (6.36)$$

Под действием этих токов в катушках создаются пульсирующие магнитные поля с магнитными индукциями в точке пересечения катушек:

$$B_A = B_m \sin \omega t,$$

$$B_B = B_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right);$$

$$B_C = B_m \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right). \qquad (6.37)$$

Для нахождения результирующей магнитной индукции введем в рассмотрение фазовый оператор $a = e^{j2\pi/3}$.

Заметим, что умножение какого-либо вектора на оператор a поворачивает этот вектор против часовой стрелки на угол $\frac{2}{3}\pi$ без изменения модуля. Умножение вектора на оператор a^2 поворачивает этот вектор против часовой стрелки на угол $\frac{4}{3}\pi$ или по часовой стрелке на угол $\frac{2}{3}\pi$.

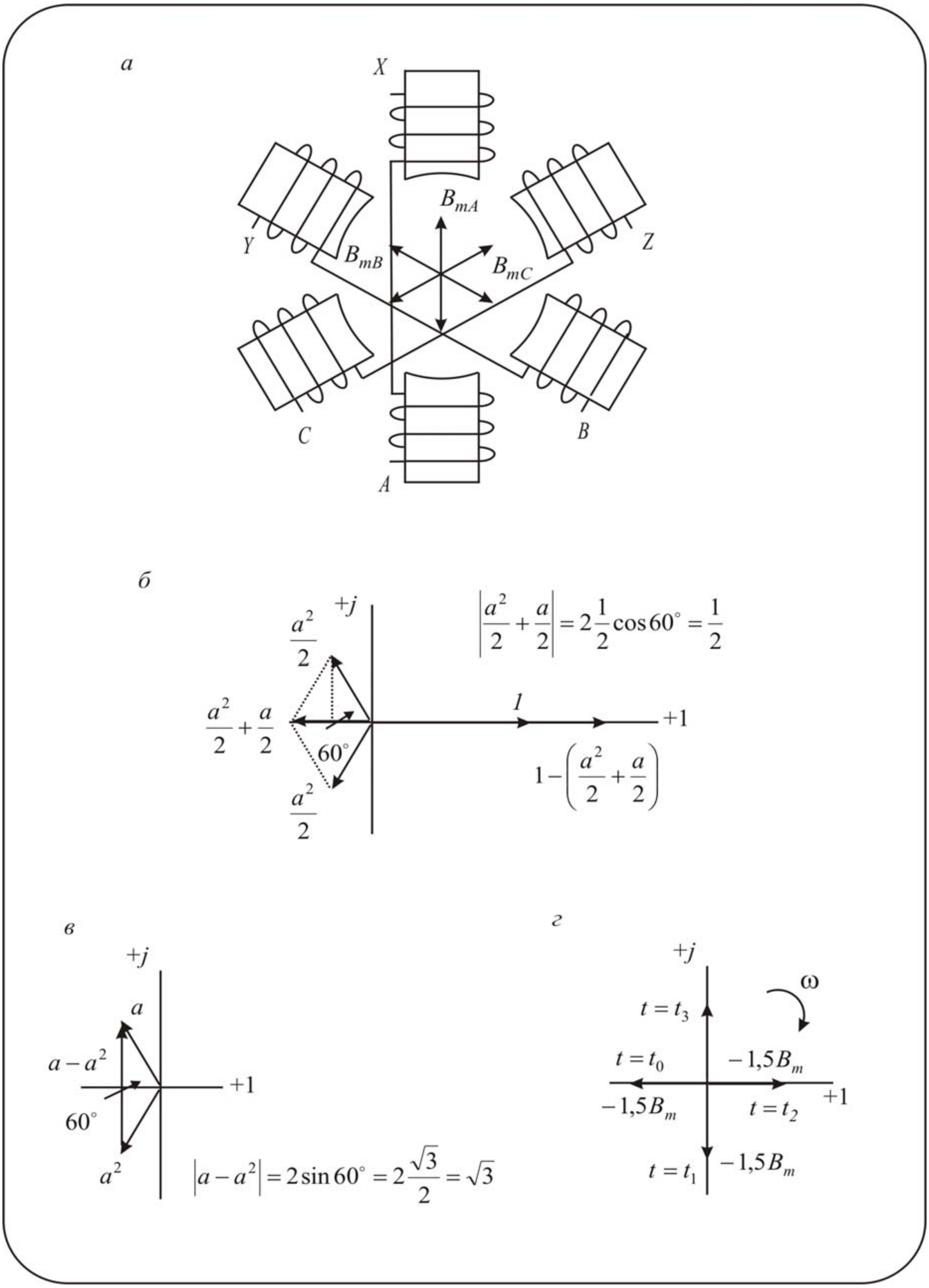


Рис. 6.6. Вращающееся магнитное поле трехфазного тока:

а – одинаковые катушки А, В, С; *б* – умножение вектора на оператор a^2;
в – умножение вектора на оператор a; *г* – результирующее магнитное поле

Используя фазовый оператор, единичный вектор и мгновенные значения магнитных индукций катушек, найдем комплекс результирующей магнитной индукции:

$$\dot{B} = \dot{B}_A + \dot{B}_B + \dot{B}_C =$$

$$= jB_A + ja^2 B_B + jaB_C = j\left(B_A + a^2 B_B + aB_C\right) =$$

$$= j\left[B_m \sin\omega t + a^2 B_m \sin(\omega t - 2\pi/3) + aB_m \sin(\omega t + 2\pi/3)\right] =$$

$$= jB_m\left[\sin\omega t + a^2 \sin(\omega t - 2\pi/3) + a\sin(\omega t + 2\pi/3)\right] =$$

$$= jB_m\left(\sin\omega t + a^2 \sin\omega t \cdot \cos 2\pi/3 - a^2 \cos\omega t \cdot \sin 2\pi/3 + \right.$$

$$\left. + a\sin\omega t \cdot \cos 2\pi/3 + a\cos\omega t \cdot \sin 2\pi/3 \right) =$$

$$= jB_m\left[\sin\omega t \cdot \left(1 - \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}\right) + \cos\omega t \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\right] =$$

$$= jB_m\left[\sin\omega t \cdot \left(1 - \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t\left(a - a^2\right)\right]. \qquad (6.38)$$

Так как (см. рис. 6.6, *б*)

$$1 - \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} = \frac{3}{2}, \qquad (6.39)$$

а (см. рис. 6.6, *в*)

$$a - a^2 = j\sqrt{3}, \qquad (6.40)$$

то комплекс результирующей магнитной индукции составит

$$\dot{B} = jB_m\left(\frac{3}{2}\sin\omega t + j\frac{3}{2}\cos\varpi t\right) = \frac{3}{2}B_m\left(-\cos\omega t + j\sin\omega t\right) =$$

$$= -1{,}5B_m\left(\cos\omega t - j\sin\omega t\right) = -1{,}5B_m\left[\cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t)\right] =$$

$$= -1{,}5B_m e^{-j\omega t}. \qquad (6.41)$$

Таким образом, получено результирующее магнитное поле с амплитудой магнитной индукции $1{,}5B_m$, вращающееся с угловой частотой ω по часовой стрелке (рис. 6.6, *г*).

6.3. Приложение ряда Фурье к исследованию сложных периодических колебаний

В электроэнергетике часто встречаются цепи, в которых имеются негармонические колебания, или несинусоидальные физические величины, например, токи и напряжения в выпрямительных устройствах.

В основу исследования сложных периодических колебаний в таких устройствах положена теорема Фурье, согласно которой периодическую сложную кривую можно разложить в ряд на бесконечно большое число отдельных составляющих, образующих ортогональную систему.

При разложении периодического колебания $s(t)$ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям в качестве ортогональной системы берут

$$1, \cos\omega_1 t, \sin\omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \ldots, \cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t, \ldots \tag{6.42}$$

или

$$\ldots e^{-i2\omega_1 t}, e^{-i\omega_1 t}, 1, e^{i\omega_1 t}, e^{-i2\omega_1 t}, \ldots . \tag{6.43}$$

Интервал ортогональности в обоих случаях совпадает с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ функции $s(t)$.

Система функций (6.42) приводит к тригонометрической форме ряда Фурье, а система (6.43) – к комплексной форме. Между этими двумя формами существует простая связь.

Воспользуемся сначала ортогональной системой (6.42). Тогда ряд Фурье должен быть записан в виде

$$s(t) = \ldots c_{-2}e^{-i2\omega_1 t} + c_{-1}e^{-i\omega_1 t} + c_0, c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{-i2\omega_1 t} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 t} . \tag{6.44}$$

Совокупность коэффициентов c_n ряда Фурье в базисе тригонометрических функций называется *частотным спектром* периодического колебания. Коэффициенты c_n ряда (6.44) легко определяются с помощью формул, приведенных в предыдущем разделе.

Из формулы (3.34) следует, что

$$\left\|\varphi_n(t)\right\|^2 = \int\limits_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega_1 t} e^{-i\omega_1 t} \mathrm{d}t = T. \qquad (6.45)$$

Таким образом, независимо от n норма $\left\|\varphi_n(t)\right\| = \sqrt{T}$. Используя формулу (3.39), получаем

$$c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} s(t)\, e^{-in\omega_1 t}\, \mathrm{d}t. \qquad (6.46)$$

В выражениях (6.45) и (6.46) учтено, что функции $e^{in\omega_1 t}$ соответствует комплексно-сопряженная функция $e^{-in\omega_1 t}$.

Коэффициенты c_n ряда Фурье в общем случае являются комплексными величинами.

Подставим $e^{-in\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t - i \sin n\omega_1 t$ в выражение (6.46):

$$c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} s(t)\, \cos n\omega_1 t\, \mathrm{d}t - i\frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} s(t)\, \sin n\omega_1 t\, \mathrm{d}t = c_{nc} - c_{ns}. \qquad (6.47)$$

Косинусная (действительная) c_{nc} и синусная (мнимая) c_{ns} части коэффициента c_n определяются следующими формулами:

$$c_{nc} = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} s(t)\, \cos n\omega_1 t\, \mathrm{d}t; \qquad (6.48)$$

$$c_{ns} = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} s(t)\, \sin n\omega_1 t\, \mathrm{d}t. \qquad (6.49)$$

Коэффициенты c_n часто бывает удобно записывать в виде

$$c_n = |c_n| \, e^{i\theta_n}, \tag{6.50}$$

где

$$|c_n| = \sqrt{c_{nc}^2 + c_{ns}^2}, \tag{6.51}$$

$$\theta_n = -\operatorname{arctg} \frac{c_{ns}}{c_{nc}}. \tag{6.52}$$

Модуль $|c_n|$ является функцией четной относительно n, а аргумент θ_n – нечетной (последнее вытекает непосредственно из выражений (6.48) и (6.49).

Общее выражение (6.44) можно привести к виду

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \, e^{i(n\omega_1 t + \theta_n)}. \tag{6.53}$$

Теперь нетрудно перейти к тригонометрической форме ряда Фурье. Выделив из ряда (6.53) пару слагаемых, соответствующих какому-либо заданному значению $|n|$, например, $|n| = 2$, и, учтя соотношения $\theta_{-2} = -\theta_2$, $|c_{-2}| = |c_2|$, получим для суммы этих слагаемых

$$|c_{-2}| \, e^{i(-2\omega_1 t + \theta_{-2})} + |c_2| \, e^{i(2\omega_1 t + \theta_2)} =$$

$$= |c_2| \left[e^{-i(2\omega_1 t + \theta_2)} + e^{i(2\omega_1 t + \theta_2)} \right] =$$

$$= 2|c_2| \cos(2\omega_1 t + \theta_2). \tag{6.54}$$

Отсюда видно, что при переходе к тригонометрической форме ряд (6.53) необходимо записать следующим образом:

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega_1 t + \theta_n). \tag{6.55}$$

Смысл удвоения коэффициентов Фурье c_n в тригонометрическом ряду при $n \geq 1$ становится ясным из рассмотрения векторной диаграммы (рис. 6.7), соответствующей выражению (6.54) при $|n| = 2$.

Вещественная функция $2|c_n|\cos(n\omega_1 t + \theta_n)$ получается как сумма проекций на горизонтальную ось *OB* двух векторов длиной $|c_n|$, вращающихся с угловой частотой $|n|\omega_1$ во взаимно противоположных направлениях.

Вектор, вращающийся против часовой стрелки, соответствует положительной частоте, а вектор, вращающийся по часовой стрелке, – отрицательной.

После перехода к тригонометрической форме понятие *отрицательная частота* теряет смысл. Коэффициент c_n не удваивается, так как в спектре периодического колебания составляющая с нулевой частотой не имеет «дублера».

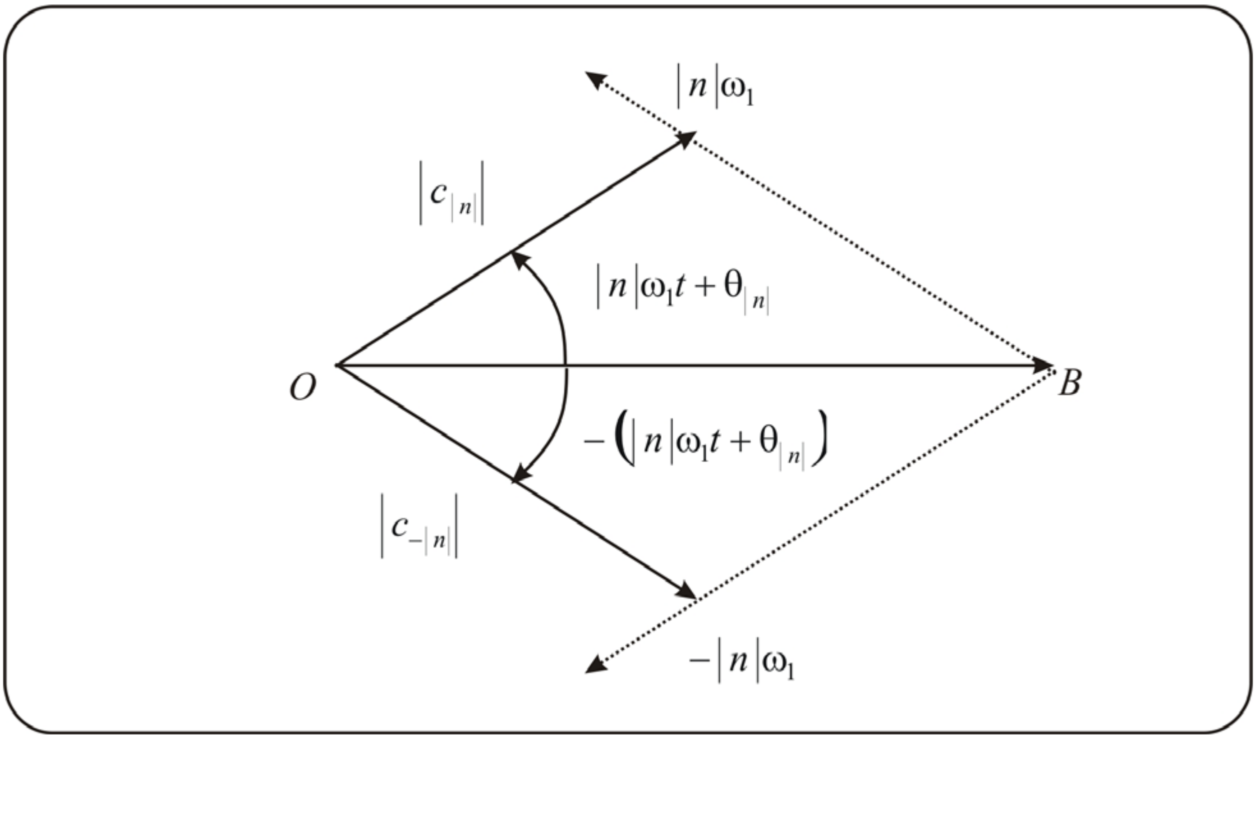


Рис. 6.7. Представление гармонического колебания в виде двух комплексных составляющих с положительной и отрицательной частотами

Вместо выражения (6.55) в математической и электротехнической литературе часто встречается тригонометрическая форма записи:

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\cos n\omega_1 t\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\omega_1 t+\theta_n\right), \qquad (6.56)$$

причем $\theta_n=-\mathrm{arctg}\left(b_n/a_n\right)$.

Из сопоставления выражений (6.56) и (6.55) видно, что амплитуда n-й гармоники A_n связана с коэффициентом $|c_n|$ ряда (6.53) соотношением $A_n=2|c_n|$, а $a_n=2c_{nc}$, $b_n=2c_{ns}$.

Таким образом, для всех положительных значений n (включая и $n=0$)

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\,\cos n\omega_1 t\,\mathrm{d}t; \qquad (6.57)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\,\sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t. \qquad (6.58)$$

Если колебание представляет собой функцию четную относительно t, то есть $s(t)=s(-t)$, в тригонометрической записи ряда остаются только косинусоидальные члены, так как коэффициенты b_n в соответствии с формулой (6.58) обращаются в нуль. И наоборот, для нечетной относительно t функции $s(t)$ в нуль обращаются коэффициенты a_n и ряд будет состоять только из синусоидальных членов.

Две характеристики – *амплитудная* и *частотная*, то есть модули и аргументы комплексных коэффициентов ряда Фурье, полностью определяют структуру частотного спектра периодического колебания.

Наглядное представление о ширине спектра дает графическое изображение спектра амплитуд.

В качестве примера на рис. 6.8, *а* построен спектр коэффициентов $|c_n|$, а на рис. 6.8, *б* – спектр амплитуд $A_n=2|c_n|$ для одного и того же периодического колебания. Для исчерпывающей характеристики спектра подобные построения должны быть дополнены заданием начальных фаз отдельных гармоник.

Таким образом, использование ряда Фурье позволяет разложить сложное периодическое колебание на ряд гармонических колебаний, то есть определить амплитуды и начальные фазы отдельных гармонических колебаний (гармоник).

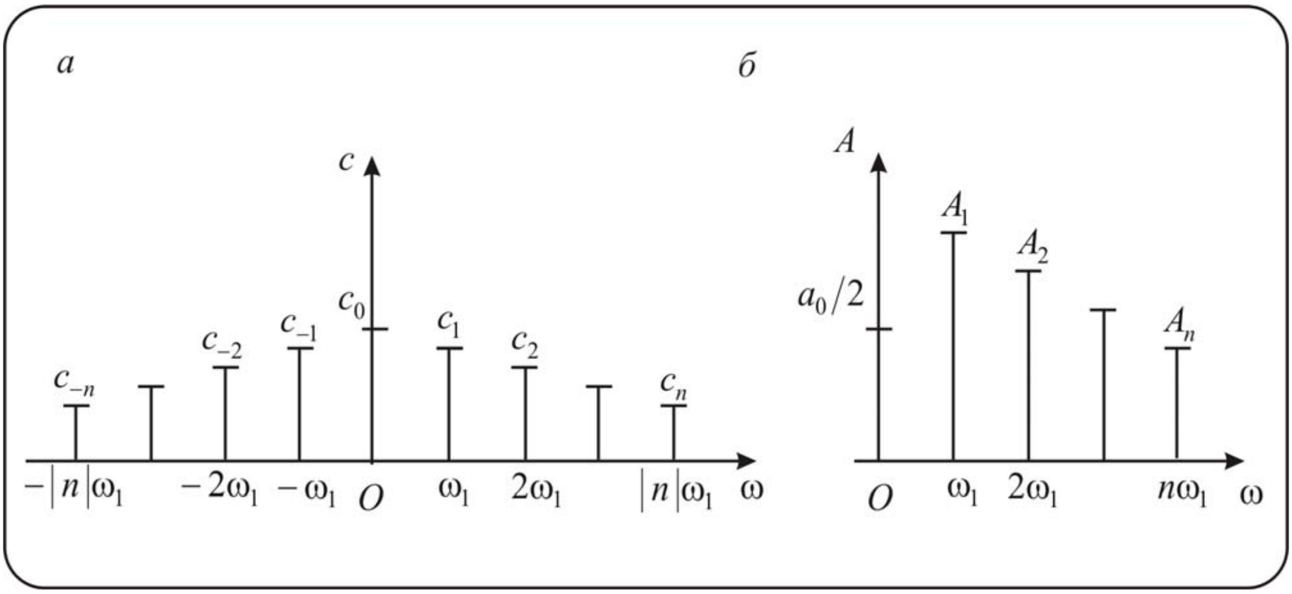


Рис. 6.8. Коэффициенты рядов Фурье периодической функции:
а – комплексного; *б* – тригонометрического

Частоты отдельных гармоник сложного колебания кратны частоте основного сложного колебания. При этом первая, *основная гармоника*, имеет частоту колебания, одинаковую с частотой сложного колебания. Вторая частота имеет двойную частоту, третья – тройную и т. д. Порядковое число гармоники показывает, во сколько раз частота ее колебания больше основной частоты.

Если есть постоянная составляющая сложного колебания, то ее частота принимается равной нулю и ее считают *нулевой гармоникой*.

Амплитуды отдельных гармоник сложного колебания различны и зависят от формы сложной кривой.

В частности, в выпрямительных устройствах при преобразовании входного напряжения $u_{\text{вх}} = U_{m_{\text{вх}}} \sin \omega t$ выпрямленное напряжение $u_{\text{вых}}$ периодическое и его можно представить рядом Фурье:

$$u_{\text{вых}} = U_{\text{вых.0}} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{\text{вых.}k} \,. \tag{6.59}$$

Первый член ряда (6.59) представляет собой постоянную составляющую выпрямленного напряжения $U_{\text{вых.0}}$, а остальные члены, стоящие под знаком суммы, описывают переменные составляющие напряжения $u_{\text{вых.}k}$ с частотами, кратными основной частоте выпрямленного напряжения.

Гармонические составляющие $u_{\text{вых.}k}$ функции $u_{\text{вых}}$ вызывают периодическое изменение напряжения во времени, называемое *пульсацией*.

При однофазном выпрямлении $(n=1)$ выходное напряжение $u_{\text{вых}}$ представляется рядом Фурье, который имеет следующий вид:

$$u_{\text{вых}} = \frac{U_{m_{\text{вых}}}}{\pi} + \frac{U_{m_{\text{вых}}}}{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) - \frac{2U_{m_{\text{вых}}}}{1 \cdot 3\pi} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2) -$$

$$- \frac{2U_{m_{\text{вых}}}}{3 \cdot 5\pi} \cdot \cos(4\omega t + \varphi_4) - \frac{2U_{m_{\text{вых}}}}{5 \cdot 7\pi} \cdot \cos(6\omega t + \varphi_6) - \cdots \,. \quad (6.60)$$

При n-фазном выпрямлении (n = 2, 3 и более) напряжение $u_{\text{вых}}$ описывается рядом Фурье [1]:

$$u_{\text{вых}} = \frac{n}{\pi} U_{m_{\text{вых}}} \cdot \sin\frac{\pi}{n} + \frac{2}{n^2 - 1} \cdot \frac{n}{\pi} \cdot U_{m_{\text{вых}}} \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos(n\omega t + \varphi_1) -$$

$$- \frac{2}{4n^2 - 1} \cdot \frac{n}{\pi} \cdot U_{m_{\text{вых}}} \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos(2n\omega t + \varphi_2) +$$

$$+ \frac{2}{8n^2 - 1} \cdot \frac{n}{\pi} \cdot U_{m_{\text{вых}}} \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos(3n\omega t + \varphi_3) - \cdots \qquad (6.61)$$

Выражения (6.60) и (6.61) позволяют оценить степень искажения кривой периодической физической величины, то есть найти отличие ее от синусоиды, а также определить качество работы электропитающих устройств и электроснабжения систем телекоммуникаций.

Приложение А.

АЛФАВИТЫ

Русский алфавит

А а [а]	К к [ка]	Х х [ха]
Б б [бэ]	Л л [эль]	Ц ц [це]
В в [вэ]	М м [эм]	Ч ч [че]
Г г [ге]	Н н [эн]	Ш ш [ша]
Д д [дэ]	О о [о	Щ щ [ща]
Е е [е]	П п [пэ]	Ъ ъ [твердый знак]
Ё ё [ё]	Р р [эр]	Ы ы [ы]
Ж ж [жэ]	С с [эс]	Ь ь [мягкий знак]
З з [зэ]	Т т [тэ]	Э э [э]
И и [и]	У у [у]	Ю ю [ю]
Й й [и краткое]	Ф ф [эф]	Я я [я]

Латинский алфавит

A a [эй]	*J j* [джей]	*R r* [ар]
B b [би]	*K k* [кэй]	*S s* [эс]
C c [си]	*L l* [эл]	*T t* [ти]
D d [ди]	*M m* [эм]	*U u* [ю]
E e [и]	*N n* [эн]	*V v* [ви]
F f [эф]	*O o* [оу]	*W w* [дабл-ю]
G g [джи]	*P p* [пи]	*X x* [экс]
H h [эйч]	*Q q* [кью]	*Y* е [уай]
I i [ай]		*Z z* [дзет]

Греческий алфавит

Α α [альфа]	Ι ι [иота]	Ρ ρ [ро]
Β β [бета]	Κ κ [каппа]	Σ σ [сигма]
Γ γ [гамма]	Λ λ [ламбда]	Τ τ [тау]
Δ δ [дельта]	Μ μ [мю]	Υ υ [ипсилон]
Ε ε [эпсилон]	Ν ν [ню]	Φ φ [фи]
Ζ ς [дзета]	Ξ ξ [кси]	Χ χ [хи]
Η η [эта]	Ο ο [омикрон]	Ψ ψ [пси]
Θ ϑ θ [тета]	Π π [пи]	Ω ω [омега]

ЛИТЕРАТУРА

1. Микиша, А.М. Толковый математический словарь. Основные термины / А.М. Микиша, В.Б. Орлов. – М: Рус. яз., 1989. – 244 с.

2. Любич, В.Н. Лекции и практические занятия по высшей математике. Кратные и криволинейные интегралы. Векторный анализ. Функции Бесселя / В.Н. Любич, М.К. Номоконов. – Л.: ВАС, 1980. – 270 с.

3. Коршунов, Ю.М. Математические основы кибернетики: учебное пособие для вузов. / Ю.М. Коршунов. – М: Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.: ил.

4. Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон – Вельский. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.: ил.

5. Морозова, В.Д. Введение в анализ: учебник для студентов вузов / В.Д. Морозова; под. ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд - во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. – 230 с.

6. Окрепилов, В.В. Словарь терминов и определений в области экономики и управления качеством. – СПб.: Наука, 1999. – 216 с.

7. Ожегов, С.И. Словарь русского языка / С.И. Ожегов; под ред. Н.Ю. Шведовой. – 21-е изд., перераб. и доп. – М.: Рус. яз., 1989. – 924 с.

8. Метрология и электроизмерения в телекоммуникационных системах: учебник для вузов / В.И. Нефедов, В.И. Хахин, Е.В. Федорова [и др.]; под ред. В.И. Нефедова. – М.: Высш. шк., 2001. – 383 с.: ил.

9. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов / И.С. Гоноровский. – 4-е изд. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.: ил.

Учебное издание

Еременко Владимир Тарасович
Орешина Марина Николаевна
Пеньков Николай Геннадьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

Редактор Г.В. Карпушина
Технический редактор Н.А. Соловьева

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Государственный университет - учебно-научно-
производственный комплекс»

Подписано к печати 19.01.2015 г. Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 12,0. Тираж 100 экз.
Заказ №______

Отпечатано с готового оригинал-макета
на полиграфической базе ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК»,
302030, г. Орел, ул. Московская, 65.